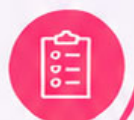


با ایران توشه
یک قدم جلوتر
باش!



ایران توشه، مرجع دانلود فایل های کمک آموزشی دانش آموزان و کنکوری ها



دانلود رایگان آزمون های آزمایشی
قلمچی، خیلی سبز، گاج و ...



دانلود رایگان گام به گام تمامی دروس



دانلود رایگان نمونه سوالات امتحانی
(نوبت اول و دوم) و امتحانات نهایی



دانلود رایگان جزوه های کمک آموزشی
و شب امتحانی

همه چیز
برای موفقیت
تو!

Google

دانلود گام به گام دوازدهم تجربی ایران توشه

دانلود گام به گام دوازدهم تجربی ایران توشه

کافیست هر فایلی که نیاز دارید
را در گوگل به این صورت جستجو کنید:

فایل مورد نیاز + ایران توشه

مثال:

دانلود گام به گام دوازدهم تجربی ایران توشه



irantooshe.ir



t.me/irantooshe





گام به گام ریاضی هشتم

فصل چهارم

عنوان فصل: جبر و معادله

از صفحه ی ۵۵ تا صفحه ی ۷۶ کتاب

در این فایل پاسخ فعالیت‌ها، کارهای کلاسی، تمرین‌ها و پرسش‌های فصل جبر و معادله آمده است. مباحث فصل: ساده کردن عبارت‌های جبری، پیدا کردن مقدار یک عبارت جبری، تجزیه عبارت‌های جبری، معادله

تهیه شده در ایران توشه، توشه ای برای موفقیت

irantooshe.ir

فهرست پرسش‌ها

۱	صفحه ۵۶ تمرین ۱ — ساده کردن عبارت‌های جبری	۱۰
۲	صفحه ۵۶ تمرین ۲ — ساده کردن عبارت‌های جبری	۱۰
۳	صفحه ۵۷ تمرین ۳ — ساده کردن عبارت‌های جبری	۱۱
۴	صفحه ۵۷ تمرین ۴ — ساده کردن عبارت‌های جبری	۱۳
۵	صفحه ۵۸ تمرین ۵ — ساده کردن عبارت‌های جبری	۱۳
۶	صفحه ۵۸ تمرین ۶ — ساده کردن عبارت‌های جبری	۱۴
۷	صفحه ۵۹ تمرین ۷ — ساده کردن عبارت‌های جبری	۱۶
۸	صفحه ۵۹ تمرین ۸ — ساده کردن عبارت‌های جبری	۱۶
۹	صفحه ۵۹ تمرین ۹ — ساده کردن عبارت‌های جبری	۱۷
۱۰	صفحه ۶۰ تمرین ۱۰ — ساده کردن عبارت‌های جبری	۱۸
۱۱	صفحه ۶۰ تمرین ۱ — پیدا کردن مقدار یک عبارت جبری	۱۸
۱۲	صفحه ۶۰ تمرین ۲ — پیدا کردن مقدار یک عبارت جبری	۱۹
۱۳	صفحه ۶۰ تمرین ۳ — پیدا کردن مقدار یک عبارت جبری	۱۹
۱۴	صفحه ۶۰ تمرین ۴ — پیدا کردن مقدار یک عبارت جبری	۲۰



۱۶	صفحه ۶۱ . تمرین ۶ — پیدا کردن مقدار یک عبارت جبری	۲۱
۱۷	صفحه ۶۱ . تمرین ۷ — پیدا کردن مقدار یک عبارت جبری	۲۲
۱۸	صفحه ۶۱ . تمرین ۸ — پیدا کردن مقدار یک عبارت جبری	۲۲
۱۹	صفحه ۶۲ . تمرین ۹ — پیدا کردن مقدار یک عبارت جبری	۲۳
۲۰	صفحه ۶۲ . تمرین ۱۰ — پیدا کردن مقدار یک عبارت جبری	۲۳
۲۱	صفحه ۶۳ . تمرین ۱۱ — پیدا کردن مقدار یک عبارت جبری	۲۴
۲۲	صفحه ۶۳ . تمرین ۱۲ — پیدا کردن مقدار یک عبارت جبری	۲۶
۲۳	صفحه ۶۵ . تمرین ۱ — تجزیه عبارت‌های جبری	۲۸
۲۴	صفحه ۶۵ . تمرین ۲ — تجزیه عبارت‌های جبری	۲۸
۲۵	صفحه ۶۵ . تمرین ۳ — تجزیه عبارت‌های جبری	۲۸
۲۶	صفحه ۶۵ . تمرین ۴ — تجزیه عبارت‌های جبری	۲۹
۲۷	صفحه ۶۶ . تمرین ۵ — تجزیه عبارت‌های جبری	۲۹
۲۸	صفحه ۶۶ . تمرین ۶ — تجزیه عبارت‌های جبری	۳۰
۲۹	صفحه ۶۶ . تمرین ۷ — تجزیه عبارت‌های جبری	۳۱
۳۰	صفحه ۶۶ . تمرین ۸ — تجزیه عبارت‌های جبری	۳۱
۳۱	صفحه ۶۶ . تمرین ۹ — تجزیه عبارت‌های جبری	۳۱



۳۳	صفحه ۶۷ • تمرین ۱۱ — تجزیه عبارتهای جبری	۳۲
۳۴	صفحه ۶۷ • تمرین ۱۲ — تجزیه عبارتهای جبری	۳۳
۳۵	صفحه ۶۸ • تمرین ۱۳ — تجزیه عبارتهای جبری	۳۴
۳۶	صفحه ۶۹ • تمرین ۱۴ — تجزیه عبارتهای جبری	۳۶
۳۷	صفحه ۶۹ • تمرین ۱۵ — تجزیه عبارتهای جبری	۳۷
۳۸	صفحه ۶۹ • تمرین ۱ — معادله	۳۷
۳۹	صفحه ۷۰ • تمرین ۲ — معادله	۳۸
۴۰	صفحه ۷۰ • تمرین ۳ — معادله	۳۸
۴۱	صفحه ۷۰ • تمرین ۴ — معادله	۳۹
۴۲	صفحه ۷۱ • تمرین ۵ — معادله	۴۰
۴۳	صفحه ۷۱ • تمرین ۶ — معادله	۴۱
۴۴	صفحه ۷۱ • تمرین ۷ — معادله	۴۱
۴۵	صفحه ۷۱ • تمرین ۸ — معادله	۴۱
۴۶	صفحه ۷۱ • تمرین ۹ — معادله	۴۲
۴۷	صفحه ۷۲ • تمرین ۱۰ — معادله	۴۲
۴۸	صفحه ۷۲ • تمرین ۱۱ — معادله	۴۲





۴۳		صفحه ۷۲ · تمرین ۱۳ — معادله	۵۰
۴۳		صفحه ۷۲ · تمرین ۱۴ — معادله	۵۱
۴۳		صفحه ۷۲ · تمرین ۱۵ — معادله	۵۲
۴۴		صفحه ۷۲ · تمرین ۱۶ — معادله	۵۳
۴۴		صفحه ۷۳ · تمرین ۱۷ — معادله	۵۴
۴۵		صفحه ۷۳ · تمرین ۱۸ — معادله	۵۵
۴۵		صفحه ۷۳ · تمرین ۱۹ — معادله	۵۶
۴۶		صفحه ۷۳ · تمرین ۲۰ — معادله	۵۷
۴۶		صفحه ۷۳ · تمرین ۲۱ — معادله	۵۸
۴۶		صفحه ۷۴ · تمرین ۲۲ — معادله	۵۹
۴۷		صفحه ۷۴ · تمرین ۲۳ — معادله	۶۰
۴۷		صفحه ۷۵ · تمرین ۲۴ — معادله	۶۱
۴۸		صفحه ۷۵ · تمرین ۲۵ — معادله	۶۲
۴۸		صفحه ۷۵ · تمرین ۲۶ — معادله	۶۳
۴۹		صفحه ۷۶ · تمرین ۲۷ — معادله	۶۴
۴۹		صفحه ۷۶ · تمرین ۲۸ — معادله	۶۵



۱. الف) حاصل عبارت $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots + n$ را بر حسب n بیابید.

ب) الگوی زیر را با دقت ببینید.

$$1 + 2 = 3$$

$$4 + 5 + 6 = 7 + 8$$

$$9 + 10 + 11 + 12 = 13 + 14 + 15$$

$$16 + 17 + 18 + 19 + 20 = 21 + 22 + 23 + 24$$

$$25 + 26 + 27 + 28 + 29 + 30 = 31 + 32 + 33 + 34 + 35$$

$$36 + 37 + 38 + 39 + 40 + 41 + 42 = 43 + 44 + 45 + 46 + 47 + 48$$

اگر این الگو را تا سطر n ادامه دهیم، با ذکر دلیل مشخص کنید که آیا تساوی برای سطر n نیز برقرار است؟

الف) مجموع را S می‌نامیم و یک بار از ۱ تا n و بار دیگر از n تا ۱ می‌نویسیم و عددهای زیر هم را جمع می‌کنیم:

$$S = 1 + 2 + 3 + \dots + n \text{ و } S = n + (n-1) + (n-2) + \dots + 1$$

هر ستون مجموعی برابر $n+1$ دارد و n ستون داریم؛ پس $2S = n(n+1)$ و

$$\text{پاسخ: } 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

ب) بله، تساوی برای هر سطر برقرار است. سطر اول با ۱ شروع می‌شود و سطرهای بعد با ۴، ۹، ۱۶، ۲۵، ۳۶ (مربع کامل)؛ پس سطر k ام با k^2 شروع می‌شود. در سطر k ام سمت چپ $k+1$ عدد متوالی $k^2 + k, k^2 + k + 1, \dots, k^2 + 2k$ و سمت راست $k^2, k^2 + 1, \dots, k^2 + k$ است (در سطر ۳: ۹ تا ۱۲ و ۱۳ تا ۱۵).

عدد زام سمت راست یعنی $k^2 + k + z$ را با عدد $(z+1)$ ام سمت چپ یعنی $k^2 + z$ مقایسه می‌کنیم؛ اولی دقیقاً k واحد بزرگ‌تر است (که $z = 1, 2, \dots, k$).

پس مجموع سمت راست = (مجموع سمت چپ $- k^2$) $+ k \times k =$ مجموع سمت چپ؛ زیرا از سمت چپ فقط عدد اول (k^2) در این مقایسه شرکت نکرده است و k جفت داریم که هر کدام k اختلاف دارند ($k \times k = k^2$).

پاسخ: بله، تساوی برای هر سطر n ام برقرار است.

۲. الگوی زیر را با دقت ببینید. الهام می‌خواست تعداد چوب‌کبریت‌های شکل ۱۵ و مائده می‌خواست تعداد چوب‌کبریت‌های شکل ۱۰ را حساب کند.

راه‌حل الهام:

$$(13 \times 6) - (1 \times 6) - (2 \times 6) - (3 \times 6) - (4 \times 6) - \dots - (6 \times 6) - (5 \times 6) - (4 \times 6) - (3 \times 6) - (2 \times 6) - (1 \times 6) = 15 \times 6$$

راه حل مائده:

$$6 + (2 \times 6 + 6) + (3 \times 6 + 6) + (4 \times 6 + 6) + \dots + (10 \times 6 + 6).$$

الف) درباره راه حل الهام و مائده بحث کنید.

ب) برای یافتن تعداد چوب کبریت های شکل n ام روش دیگری بیابید.



از شکل ها می بینیم: شکل ۱ یک شش ضلعی با ۶ چوب است. در شکل ۲ شش ضلعی بیرونی هر ضلعش ۲ چوب دارد (۱۲ چوب)، داخل آن شش ضلعی ۶ چوبی است و ۶ چوب این دو را به هم وصل می کند: $24 = 12 + 6 + 6$. در شکل ۳ سه شش ضلعی با ضلع های ۳ و ۲ و ۱ چوبی (۱۸ و ۱۲ و ۶ چوب) و دو دسته ۶ تایی چوب رابط داریم: $48 = 18 + 12 + 6 + 12$.

الف) مائده: هر بار که از یک شکل به شکل بعد می رویم، یک شش ضلعی بیرونی تازه با $6k$ چوب (برای شکل k ام) و ۶ چوب رابط اضافه می شود؛ پس عدد $6 + (2 \times 6 + 6) + \dots$ ساخته می شود. این روش ساختنی و با شکل کاملاً سازگار است (شکل ۲: $24 = 6 + 18$ و شکل ۳: $48 = 24 + 24$).

شکل ۱۰: $\sum (6k + 6)$ برای $k = 2, \dots, 10$ که برابر است با $54 + 324 = 378$ و $6 + 6 \times 54 = 324$.

الهام: اول $1350 = (6 \times 15) \times 15$ را در نظر می گیریم و بعد $546 = 91 \times 6 = (1 + 2 + \dots + 13) \times 6$ را کم می کند: $804 = 1350 - 546$. این روش «بیشتر بشمار و بعد کم کن» است و معنای هندسی اش از شکل به سادگی دیده نمی شود، ولی نتیجه اش درست است.

برای هر دو روش، همه $n \geq 2$ این تساوی ها برقرارند: $6 + \sum_{k=2}^n (6k + 6) = 3n^2 + 9n - 6$ و $6n^2 - 6(1 + 2 + \dots + (n-2)) = 6n^2 - 3(n-1)(n-2) = 3n^2 + 9n - 6$ یعنی هر دو راه حل یک فرمول را می دهند. تعداد چوب کبریت های شکل ۱۰ برابر ۳۸۴ و شکل ۱۵ برابر ۸۰۴ است.

ب) روش دیگر: شکل n ام شامل n شش ضلعی تو در تو با ضلع های ۱ تا n چوبی است: $6(1 + 2 + \dots + n) = 3n(n+1)$ چوب. بین هر دو شش ضلعی متوالی ۶ چوب رابط هست و $n-1$ فاصله داریم: $6(n-1)$ چوب.

جمع: $3n(n+1) + 6(n-1) = 3n^2 + 9n - 6$: امتحان: $n=1$: ۶، $n=2$: ۲۴، $n=3$: ۴۸، $n=10$: ۳۸۴.

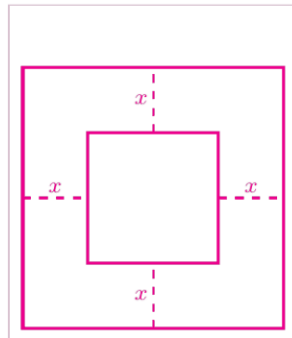
تمرین ۳

صفحه ۵۷

۳

۳. ده عدد بعدی الگوی زیر را بنویسید.

۴. در شکل زیر، طول ضلع مربع بزرگ ۳ واحد است. مساحت مربع کوچک را بر حسب x به دست آورید.



فاصله هر ضلع مربع کوچک تا ضلع مربع بزرگ برابر x است؛ پس از هر طرف x واحد کم می شود و طول ضلع مربع کوچک برابر $3 - x - x = 3 - 2x$ است.

مساحت مربع کوچک: $(3 - 2x)^2 = (3 - 2x)(3 - 2x) = 9 - 6x - 6x + 4x^2 = 9 - 12x + 4x^2$

پاسخ: $4x^2 - 12x + 9$ (با شرط $0 < x < 1.5$).

۵. میثم و مهسا با روش های زیر حاصل ضرب $(2x + 3)(x^2 - 5x + 4)$ را به دست آوردند.

الف) درباره دو راه حل بالا بحث کنید.

ب) ابتدا دو عدد ۳۸ و ۱۵۴ را به صورت گسترده بنویسید. سپس یک بار با روش میثم و بار دیگر با روش مهسا حاصل 38×154 را بیابید.

ج) حاصل ضرب عدد دو رقمی $\overline{ab}$ در $\overline{ba}$ را به دست آورید.

روش میثم:

$$\begin{aligned} (2x + 3)(x^2 - 5x + 4) &= 2x(x^2 - 5x + 4) + 3(x^2 - 5x + 4) \\ &= (2x^3 - 10x^2 + 8x) + (3x^2 - 15x + 12) \\ &= 2x^3 - 7x^2 - 7x + 12. \end{aligned}$$

روش مهسا:

$$\begin{array}{r} x^2 - 5x + 4 \\ 2x + 3 \\ \hline 2x^3 - 10x^2 + 8x \\ 2x^3 - 10x^2 + 8x \\ \hline 2x^3 - 7x^2 - 7x + 12 \end{array}$$

الف) هر دو راه حل از خاصیت پخشی ضرب نسبت به جمع استفاده می کنند و جواب یکسان $12 - 7x + 7x^2 - 2x^3$ را می دهند.

○ میثم: هر جمله پُرانتز اول را جداگانه در کل پُرانتز دوم ضرب می کند: $3(x^2 - 5x + 4) + 2x(x^2 - 5x + 4)$ و بعد پُرانتزها را باز می کند و جمله های متشابه را جمع می کند.

○ مهسا: مانند ضرب عمودی عددها، دو عبارت را زیر هم می نویسد؛ ابتدا ۳ را در عبارت بالا ضرب می کند و بعد $2x$ را در آن ضرب می کند و حاصل را یک ستون به چپ می برد تا جمله های هم توان زیر هم قرار گیرند و بتوان آن ها را ستون به ستون جمع کرد.

○ تفاوت: میثم گام ها را به صورت نوشته (افقی) و مهسا به صورت جدول (عمودی) پیش می برد؛ روش مهسا جمله های متشابه را مرتب کنار هم می گذارد و کمتر احتمال دارد جمله ای فراموش شود. همان طور که در ضرب عددها «رقم نقلی» داریم، در ضرب چند جمله ای ها نقلی نداریم.

ب) $38 = 3 \times 10 + 8$ و $154 = 1 \times 100 + 5 \times 10 + 4$ اگر $x = 10$ بگیریم: $38 = 3x + 8$ و $154 = x^2 + 5x + 4$.

روش میثم:

$$(3x + 8)(x^2 + 5x + 4) = 3x(x^2 + 5x + 4) + 8(x^2 + 5x + 4) \\ = (3x^3 + 15x^2 + 12x) + (8x^2 + 40x + 32) = 3x^3 + 23x^2 + 52x + 32$$

روش مهسا:

$$\begin{array}{r} x^2 + 5x + 4 \\ 3x + 8 \\ \hline 8x^2 + 40x + 32 \\ 3x^3 + 15x^2 + 12x \\ \hline 3x^3 + 23x^2 + 52x + 32 \end{array}$$

با $x = 10$: $38 \times 154 = 5852$ $32 + 520 + 2300 + 3000 = 5852$ $32 + 52 \times 10 + 23 \times 100 + 3 \times 1000$ (امتحان: $38 \times 154 = 5852$)

پاسخ: $38 \times 154 = 5852$.

ج) $\overline{ab} = 10a + b$ و $\overline{ba} = 10b + a$

$$(10a + b)(10b + a) = 100ab + 10a^2 + 10b^2 + ab = 10a^2 + 101ab + 10b^2$$

تمرین ۶

صفحه ۵۸

۶

۶. عبارت های جبری زیر را ساده کنید.

الف) $(x^2 - 3x + 9)(x - 3)$ (ب) $(4x - 5y)(3x - y)$

ج) $(x^2 - 3x + 1)(1 + 2x)$ (د) $(2x + y)(2x + y + 3)$

ه) $(x + y - z)(x - z)$ (و) $(a^2 + b)(c - b + d - a^2)$

$$(a^2 + b)(c^2 - d)(\delta - 2e) \quad \text{ج} \quad (z^2 - \delta)(z + 1)(z^2 + 2z + 1) \quad \text{ز}$$

$$(x^3 - 1)(x^2 - 2\delta)(z + 1)^2 \quad \text{ی} \quad x\left(x^2 - \frac{V}{F}\right)(4x^2 - x + 1) \quad \text{ط}$$

همه حالت‌ها با خاصیت پخشی (هر جمله در هر جمله) و جمع جمله‌های متشابه حل می‌شوند.

(الف)

$$x(x^2 - 3x + 9) - 3(x^2 - 3x + 9) = x^3 - 3x^2 + 9x - 3x^2 + 9x - 27$$

$$= x^3 - 6x^2 + 18x - 27$$

$$12x^2 - 4xy - 15xy + 5y^2 = 12x^2 - 19xy + 5y^2 \quad \text{ب}$$

(ج)

$$(x^2 - 3x + 1) + 2x(x^2 - 3x + 1) = x^2 - 3x + 1 + 2x^3 - 6x^2 + 2x$$

$$= 2x^3 - 5x^2 - x + 1$$

(د)

$$2x(2x + y + 3) + y(2x + y + 3) = 4x^2 + 2xy + 6x + 2xy + y^2 + 3y$$

$$= 4x^2 + 4xy + y^2 + 6x + 3y$$

(ه)

$$x(x - z) + y(x - z) - z(x - z) = x^2 - xz + xy - yz - xz + z^2$$

$$= x^2 + xy - 2xz - yz + z^2$$

(و)

$$a^2c - a^2b + a^2d - a^2 + bc - b^2 + bd - a^2b$$

$$= -a^2 - 2a^2b + a^2c + a^2d - b^2 + bc + bd$$

ز) ابتدا $(z^2 - \delta)(z + 1) = z^3 + z^2 - \delta z - \delta$ و سپس در $z^2 + 2z + 1$ ضرب می‌کنیم:

$$z^3(z^2 + 2z + 1) + z^2(z^2 + 2z + 1) - \delta z(z^2 + 2z + 1) - \delta(z^2 + 2z + 1)$$

$$= z^5 + z^6 - \delta z^5 - 3z^4 + 3z^3 - 9z^2 - 15z - \delta$$

$$(a^2 + b)(c^2 - d) = a^2c^2 - a^2d + bc^2 - bd \quad \text{ح}$$

$$5a^2c^2 - 5a^2d + 5bc^2 - 5bd - 2a^2c^2e + 2a^2de - 2bc^2e + 2bde$$

$$x\left(x^2 - \frac{V}{F}\right) = x^3 - \frac{V}{F}x \quad \text{ط}$$

$$4x^5 - x^6 + x^3 - 7x^3 + \frac{V}{F}x^2 - \frac{V}{F}x$$

$$= 4x^5 - x^6 - 6x^3 + \frac{V}{F}x^2 - \frac{V}{F}x$$

$$(z + 1)^2 = z^2 + 2z + 1 \quad \text{و} \quad (x^3 - 1)(x^2 - 2\delta) = x^5 - 2\delta x^3 - x^2 + 2\delta \quad \text{ی}$$

۷

صفحه ۵۹

تمرین ۷

۷. یک عدد سه رقمی کوچکتر از ۹۰۰ انتخاب کنید. اختلاف این عدد با عدد ۹۹۹ را در سمت راست آن بنویسید. عدد شش رقمی به دست آمده بر ۳۷ بخش پذیر است؛ خارج قسمتی که به دست می آید بر ۲۷ بخش پذیر است و خارج قسمت دوم یک واحد از عدد سه رقمی انتخاب شده بیشتر است. برای مثال، اگر ۱۶۷ را انتخاب کنیم، داریم:

$$999 - 167 = 832, \quad 167832 / 37 = 4536, \quad 4536 / 27 = 168, \quad 168 = 167 + 1.$$

الف) چرا مراحل بالا برای هر عدد سه رقمی کوچکتر از ۹۰۰ درست است؟
ب) قانون بالا را طوری اصلاح کنید که این قانون برای هر عدد سه رقمی دلخواه برقرار باشد.

الف) عدد سه رقمی را n می نامیم ($100 \leq n \leq 899$). اختلاف $d = 999 - n$ بین ۱۰۰ و ۸۹۹ است، پس سه رقمی است. نوشتن d در سمت راست n یعنی n را در ۱۰۰۰ ضرب و با d جمع کنیم:

$$1000n + d = 1000n + (999 - n) = 999n + 999 = 999(n + 1)$$

$$= 27 \times 37 \times (n + 1)$$

پس عدد شش رقمی بر ۳۷ بخش پذیر است و خارج قسمت $27(n+1)$ می شود؛ این عدد بر ۲۷ بخش پذیر است و خارج قسمتش $n+1$ است. (برای ۱۶۷: $167832 : 37 = 4536$)

شرط «کوچکتر از ۹۰۰» برای این است که $n - 999$ حتماً سه رقمی باشد؛ در غیر این صورت (مثلاً $n = 950$ و اختلاف ۴۹) نوشتن اختلاف، عدد شش رقمی نمی سازد و تساوی $1000n + d$ برقرار نمی ماند.

ب) اگر اختلاف $n - 999$ کمتر از سه رقم شد، با صفر در سمت چپ آن را سه رقمی می نویسیم؛ مثلاً برای $n = 950$ اختلاف را ۰۴۹ می نویسیم. آن گاه باز هم $1000n + d = 999(n+1)$ و قانون برای هر عدد سه رقمی درست است. مثال: $25677 / 37 = 694 + 1 = 695 = 950 - 253$ و $25677 / 27 = 951$.

توشه ای برای موفقیت

۸

صفحه ۵۹

تمرین ۸

۸. صالح برای محاسبه توان دوم یک عدد دو رقمی که یکان آن ۵ است، ابتدا عدد دهگان را در عدد بعدی اش ضرب می کند و سپس در سمت راست حاصل ضرب به دست آمده عدد ۲۵ را می نویسد. برای مثال:

$$(8 \times 7 = 56) \quad 5625 = (75)^2$$

صالح مدعی است که چنین روشی برای یافتن مربع هر عدد سه رقمی با یکان ۵ نیز کار می کند. برای مثال:

$$(11 \times 10 = 110) \quad 11025 = (105)^2$$

بله، ادعای صالح درست است. هر عدد با یکان ۵ را می‌توان $10a + 5$ نوشت که a عددی است که با حذف یکان به دست می‌آید (برای عدد دو رقمی $75: 7=a$ و برای عدد سه رقمی $105: 10=a$).

$$(10a + 5)^2 = 100a^2 + 100a + 25 = 100a(a + 1) + 25$$

یعنی مربع عدد برابر است با $a(a+1)$ ضرب در ۱۰۰ و سپس ۲۵ واحد اضافه؛ و این همان نوشتن ۲۵ در سمت راست حاصل ضرب $a(a+1)$ است (چون ۲۵ از ۱۰۰ کمتر است). بنابراین روش برای عددهای سه رقمی (و هر تعداد رقم) هم کار می‌کند. مثال: $11025 \rightarrow 110 \times 11 = 12210 \rightarrow 12210 + 25 = 12235$ و $105 \rightarrow a = 10 \rightarrow 10 \times 11 = 110 \rightarrow 11025$.

تمرین ۹

صفحه ۵۹

۹

۹. اگر a, b و c سه عدد باشند، آنگاه خانه‌های خالی جدول زیر را طوری پر کنید که یک مربع جادویی داشته باشید.

a		b
		c

در مربع جادویی مجموع هر سطر، ستون و دو قطر برابر عدد ثابتی مانند S است. خانه‌ها را مانند شکل p, q, r, s, t, u می‌نامیم (سطر اول p, q, r ، سطر دوم a, s, b ، سطر سوم t, u, c).

(۱) خانه وسط: سطر وسط، ستون وسط و دو قطر را جمع می‌کنیم؛ مجموعشان $4S$ است و در آن‌ها هر خانه یک بار و خانه وسط سه بار اضافه شمرده می‌شود. مجموع همه خانه‌ها (از سه سطر) $3S$ است؛ پس $S = \frac{S}{3}$ و $3S + 3s = 4S$.

(۲) سطر وسط: $a + s + b = S = 3s$ پس $s = \frac{a+b}{2}$ و $S = \frac{3(a+b)}{2}$.

(۳) ستون سوم: $c = \frac{3a+b}{2} - b - c = \frac{3a+b}{2} - b - c$ قطر p, s, c : $p = S - s - c = a + b - c$.

(۵) قطر r, s, t : $t = S - s - r = \frac{b-a}{2} + c$ سطر اول: $q = S - p - r = 2c - a$ سطر سوم: $u = S - t - c = 2a + b - 2c$.

جدول کامل (مجموع هر سطر، ستون و قطر برابر $\frac{3}{2}(a+b)$ است)

ستون ۱	ستون ۲	ستون ۳
$a + b - c$	$2c - a$	$\frac{3a+b}{2} - c$
a	$\frac{a+b}{2}$	b
$\frac{b-a}{2} + c$	$2a + b - 2c$	c

(با جایگذاری، مجموع ستون اول، ستون دوم، سطر اول، سطر سوم و قطر دوم نیز $\frac{3(a+b)}{2}$ می شود.)

تمرین ۱۰

صفحه ۶۰

۱۰

۱۰. صبح دیروز نرخ تبدیل دلار در سه صرافی برابر بود. ظهر، صرافی اول ۱٪ به نرخ دلار اضافه کرد و عصر ۱٪ از نرخ جدید آن کم کرد. صرافی دوم، ظهر ۱٪ از نرخ دلار کم کرد و عصر ۱٪ به نرخ جدید آن اضافه کرد. صرافی سوم نرخ دلار را تغییر نداد. عصر دیروز نرخ دلار در کدام صرافی از بقیه بیشتر بود؟

نرخ صبح را r می نامیم.

○ صرافی اول: ظهر $1,01r$ و عصر ۱٪ از نرخ جدید کم می شود: $0,9999r = 1,01r \times 0,99$.

○ صرافی دوم: ظهر $0,99r$ و عصر ۱٪ از نرخ جدید اضافه می شود: $0,9999r = 0,99r \times 1,01$.

○ صرافی سوم: r .

چون $0,9999r > r$ ، عصر دیروز نرخ دلار در صرافی سوم از دو صرافی دیگر بیشتر بود (نرخ در دو صرافی اول و دوم برابر است).

تمرین ۱

صفحه ۶۰

۱۱

۱. مقدار عبارت جبری $n^2 + n + 41$ را برای $n = 1, n = 2, n = 3, \dots, n = 20$ به دست آورید. اعداد به دست آمده چه خاصیت مشترکی دارند؟

مقادیر به ترتیب از $n = 1$ تا $n = 20$:

۴۳، ۴۷، ۵۳، ۶۱، ۷۱، ۸۳، ۹۷، ۱۱۳، ۱۳۱، ۱۵۱، ۱۷۳، ۱۹۷، ۲۲۳، ۲۵۱، ۲۸۱، ۳۱۳، ۳۴۷، ۳۸۳، ۴۲۱، ۴۶۱.

پاسخ: همه این عددها اول هستند. (برای هر کدام، بر هیچ عدد اول کوچک تر از جذرش بخش پذیر نیست؛ مثلاً ۴۶۱ بر ۲، ۳، ۵، ۷، ۱۱، ۱۳، ۱۷، ۱۹ بخش پذیر نیست.)

نکته: این خاصیت برای همه n درست نیست؛ مثلاً $n = 40$ می دهد $41^2 = 1681 = 40^2 + 40 + 41$ که اول نیست.

۲. از بهنام، احسان، حامد و شکیب پرسیدند:

اگر $a > 0$ ، $b < 0$ و $c < 0$ ، آنگاه چندتا از عبارت‌های زیر منفی هستند؟

$$\frac{a^3 b^3}{b^6 c^3} \cdot (ac - b^2 c) \cdot (b - a)^3 \cdot ab^2 c$$

آنها به پرسش بالا این‌گونه پاسخ داده‌اند:

بهنام: حداقل سه تا احسان: حداکثر سه تا

حامد: بیشتر از سه تا شکیب: کمتر از سه تا

دربارهٔ درستی یا نادرستی هر یک از پاسخ‌های بالا بحث کنید.

علامت هر عبارت (با $a > 0$ ، $b < 0$ ، $c < 0$):

- ☐ $ab^2 c$: $a > 0$ ، $b^2 > 0$ ، $c < 0$ منفی.
- ☐ $(b - a)^3$: چون $b < a$ پس $b - a < 0$ و توان فرد منفی را منفی نگه می‌دارد $\leftarrow$ منفی.
- ☐ صورت $\frac{a^3 b^3}{b^6 c^3}$ منفی (چون $b^3 < 0$) و مخرج $b^6 c^3 > 0$ $\leftarrow$ منفی.
- ☐ $ac - b^2 c = c(a - b^2)$: چون $c < 0$ علامتش مخالف علامت $a - b^2$ است: اگر $a > b^2$ منفی، اگر $a < b^2$ مثبت و اگر $a = b^2$ صفر (منفی نیست).
- پس سه عبارت اول همیشه منفی‌اند و عبارت سوم می‌تواند منفی نباشد ($a \leq b^2$) یا منفی باشد ($a > b^2$).
- تعداد عبارت‌های منفی ۳ یا ۴ است.
- مثال‌ها: $a = 1$ ، $b = -2$ ، $c = -1$ $\leftarrow ac - b^2 c = -1 + 4 = 3$ مثبت، پس دقیقاً ۳ عبارت منفی؛ $a = 5$ ، $b = -1$ ، $c = -1$ $\leftarrow -4 = -5 + 1$ منفی، پس ۴ عبارت منفی.
- ☐ بهنام (حداقل ۳): همیشه درست است.
- ☐ احسان (حداکثر ۳): فقط وقتی $a \leq b^2$ درست است؛ برای $a = 5$ ، $b = -1$ ، $c = -1$ نادرست است، پس همیشه درست نیست.
- ☐ حامد (بیشتر از ۳): فقط وقتی $a > b^2$ درست است؛ برای $a = 1$ ، $b = -2$ ، $c = -1$ نادرست است، پس همیشه درست نیست.
- ☐ شکیب (کمتر از ۳): همیشه نادرست است.

۳. اگر $x + 2y = 4$ ، آنگاه مجموع عبارت‌های جبری زیر را به دست آورید.

$$3x + 5y, 2x + 3y, x + 2y, x + 4y, 2y, x.$$

ضریب‌های x را جمع می‌کنیم: $3 + 2 + 1 + 1 + 0 + 1 = 8$ ، و ضریب‌های y : $5 + 3 + 2 + 4 + 2 + 0 = 16$.

مجموع: $8x + 16y = 8(x + 2y) = 8 \times 4 = 32$

پاسخ: ۳۲.

تمرین ۴

صفحه ۶۰

۱۴

۴. می‌دانیم x, y و z سه عدد متفاوت هستند و یکی از آنها ۳، دیگری ۴ و یکی دیگر ۵ است. بیشترین و کمترین مقدار هر یک از عبارتهای زیر را بیابید.

(الف) $-x^y - z$ (ب) $-x^y - \frac{1}{z}$

شش حالت برای (x, y, z) وجود دارد و مقدار را در هر حالت حساب می‌کنیم (x^y ابتدا محاسبه می‌شود):

(x, y, z)	(الف) $-x^y - z$	(ب) $-x^y - \frac{1}{z}$
(۳, ۴, ۵)	$-۸۱ - ۵ = -۸۶$	$-۸۱ - \frac{1}{5} = -\frac{۴۰۶}{5}$
(۳, ۵, ۴)	$-۲۴۳ - ۴ = -۲۴۷$	$-۲۴۳ - \frac{1}{4} = -\frac{۹۷۳}{4}$
(۴, ۳, ۵)	$-۶۴ - ۵ = -۶۹$	$-۶۴ - \frac{1}{5} = -\frac{۳۲۱}{5}$
(۴, ۵, ۳)	$-۱۰۲۴ - ۳ = -۱۰۲۷$	$-۱۰۲۴ - \frac{1}{3} = -\frac{۳۰۷۳}{3}$
(۵, ۳, ۴)	$-۱۲۵ - ۴ = -۱۲۹$	$-۱۲۵ - \frac{1}{4} = -\frac{۵۰۱}{4}$
(۵, ۴, ۳)	$-۶۲۵ - ۳ = -۶۲۸$	$-۶۲۵ - \frac{1}{3} = -\frac{۱۸۷۶}{3}$

(الف) بیشترین مقدار ۶۹- (برای $x=4, y=3, z=5$) و کمترین مقدار ۱۰۲۷- (برای $x=4, y=5, z=3$).

(ب) بیشترین مقدار $-\frac{۳۲۱}{5} = -۶۴.۲$ (برای $x=4, y=3, z=5$) و کمترین مقدار $-\frac{۳۰۷۳}{3}$ (برای $x=4, y=5, z=3$).

توشه‌ای برای موفقیت

این فایل توسط سایت ایران توشه تهیه شده است.

irantooshe.ir



تمرین ۵

صفحه ۶۱

۱۵

۵. همه مستطیل‌ها به محیط ۲۰ سانتی‌متر و طول اضلاع صحیح را رسم کنید. کدام مستطیل بیشترین مساحت را دارد؟

محیط ۲۰ یعنی طول + عرض = ۱۰. حالت‌ها:

طول	عرض	مساحت (سانتی متر مربع)
۹	۱	۹
۸	۲	۱۶
۷	۳	۲۱
۶	۴	۲۴
۵	۵	۲۵

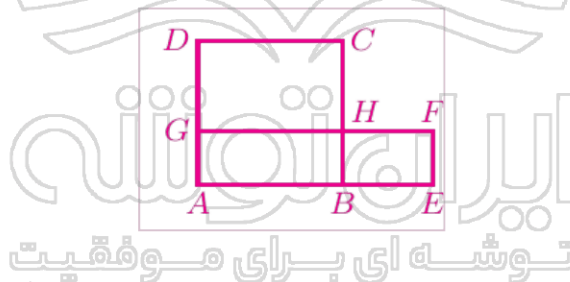
پاسخ: مربع ۵×۵ با مساحت ۲۵ سانتی متر مربع بیشترین مساحت را دارد.

۱۶

صفحه ۶۱

تمرین ۶

۶. در شکل زیر، محیط مربع ABCD با محیط مستطیل AEFG برابر است. طول ضلع مربع ABCD را برابر a و عرض مستطیل AEFG را برابر b در نظر بگیرید.
 الف) طول DG را بر حسب a و b به دست آورید.
 ب) طول BE بر حسب a و b چیست؟
 ج) مساحت BEFH و GHCD را بر حسب a و b به دست آورید.
 د) ثابت کنید مساحت GHCD از مساحت BEFH بیشتر است.
 ه) ثابت کنید مساحت مربع ABCD از مساحت مستطیل AEFG بیشتر است.



محیط مربع $۴a$ است. مستطیل AEFG عرض $AG = b$ و طول AE دارد: $۲(AE + b) = ۴a$ پس $AE = ۲a - b$ (در شکل $b < a$ است).

الف) $DG = AD - AG = a - b$.

ب) $BE = AE - AB = (۲a - b) - a = a - b$.

ج) $BH = AG = b$ پس مساحت $BEFH = BE \times BH = (a - b)b$. چهارضلعی GHCD مستطیلی به طول $GH = AB = a$ و عرض $DG = a - b$ است: مساحت $GHCD = a(a - b)$.

د) $a(a - b) - b(a - b) = (a - b)(a - b) = (a - b)^2 > ۰$ زیرا $a \neq b$ ؛ پس مساحت GHCD بیشتر از BEFH است.

ه) مساحت $ABCD = \text{مساحت } ABHG + \text{مساحت } GHCD$ و $\text{مساحت } AEFG = \text{مساحت } ABHG + \text{مساحت } ABHG$ (چون $BEFH$ یک مربع است). چون $BEFH$ یک مربع است، $\text{مساحت } BEFH < \text{مساحت } GHCD$ ، پس $\text{مساحت } AEFG < \text{مساحت } ABCD$ (یا: $a^2 - (2a - b)b = a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2 > 0$) بیشتر است.

تمرین ۷

صفحه ۶۱

۱۷

۷. اگر کلیه مستطیل‌هایی که اندازه محیط آنها برابر $4a$ است را رسم کنیم، کدام مستطیل بیشترین مساحت را دارد؟ چرا؟
راهنمایی: از تمرین قبل استفاده کنید.

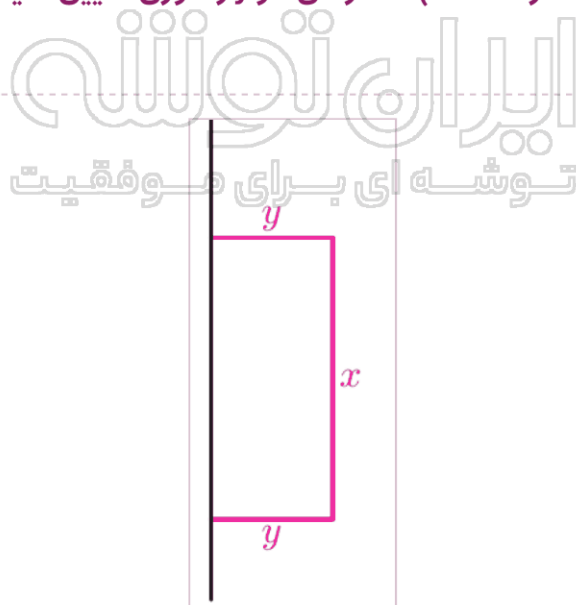
مربع $ABCD$ در تمرین قبل محیط $4a$ دارد. هر مستطیل دیگر با همین محیط (مانند $AEFG$ در تمرین ۶) مساحتی کمتر از مساحت مربع $ABCD$ دارد، چون $a^2 - (2a - b)b = (a - b)^2 > 0$. به طور کلی طول و عرض هر مستطیل با محیط $4a$ (مجموع طول و عرض $2a$) را $a + d$ و $a - d$ می‌نویسیم؛ مساحت آن $(a + d)(a - d) = a^2 - d^2 \leq a^2$ است و فقط وقتی $d = 0$ به a^2 می‌رسد. پاسخ: مربعی به ضلع a با مساحت a^2 بیشترین مساحت را دارد.

تمرین ۸

صفحه ۶۱

۱۸

۸. آقا فرامرزی می‌خواهد با سیم توری، در زمین کشاورزی خود حصاری به شکل مستطیل بکشد. طول سیم توری او ۶۰۰ متر است. مطابق شکل زیر، یک ضلع مستطیل به دیوار محصور است. (فرض کنید خط سیاه زیر همان دیوار و خطوط صورتی حصار هستند!) مقدارهای x و y را طوری تعیین کنید که مساحت داخل حصار بیشترین مقدار ممکن باشد.



سیم فقط برای سه ضلع لازم است: $x + 2y = 600$ و مساحت $S = xy$.

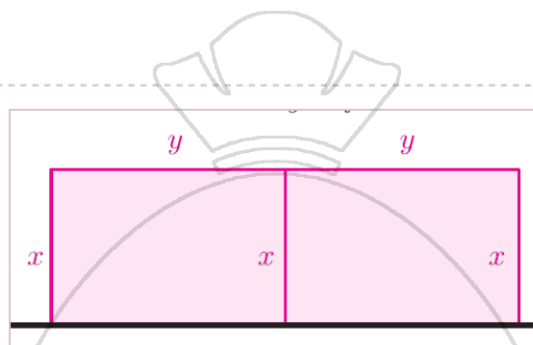
قرار می‌دهیم $u = x$ و $v = 2y$ که $u + v = 600$ ؛ مساحت $S = uv/2$. طبق تمرین ۷، از میان مستطیل‌هایی که مجموع طول و عرض‌شان ۶۰۰ است (محیط ۱۲۰۰)، مربع بیشترین مساحت را دارد؛ یعنی $u = v = 300$. (به‌طور مستقیم: $uv = 300^2 - (300 - u)^2 \leq 300^2$)
پس $x = 300$ و $2y = 300$ یعنی $y = 150$.
پاسخ: $x = 300$ متر و $y = 150$ متر؛ بیشترین مساحت $300 \times 150 = 45000$ متر مربع.

تمرین ۹

صفحه ۶۲

۱۹

۹. فرض کنید f مقداری ثابت باشد. در شکل زیر، x و y را طوری تعیین کنید که مساحت صورتی رنگ بیشترین مقدار ممکن باشد به‌طوری‌که $3x + 2y = f$.



شکل شامل دو مستطیل مجاور به عرض y و ارتفاع x است؛ مساحت $S = 2xy$.
قرار می‌دهیم $u = 3x$ و $v = 2y$ که $u + v = f$ و $S = 2xy = \frac{1}{3}(3x)(2y) = \frac{uv}{3}$. چون $uv \leq \frac{f^2}{4}$ و تساوی فقط وقتی $u = v$ است، پس $\left(\frac{f}{2}\right)^2 - uv = \left(\frac{u-v}{2}\right)^2 \geq 0$.
بنابراین $3x = 2y = \frac{f}{2}$ یعنی $x = \frac{f}{6}$ و $y = \frac{f}{4}$.
پاسخ: $x = \frac{f}{6}$ ، $y = \frac{f}{4}$ و بیشترین مساحت $\frac{f^2}{12}$.
 $2 \cdot \frac{f}{6} \cdot \frac{f}{4} = \frac{f^2}{12}$

توشه ای برای موفقیت

تمرین ۱۰

صفحه ۶۲

۲۰

۱۰. اگر a و b دو عدد باشند، حاصل $a \perp b$ برابر $a - \frac{b}{2}$ ، و حاصل $a \top b$ برابر $\frac{a}{2} - b$ می‌شود.
برای مثال:

$$2 \perp 4 = 2 - \frac{4}{2} = 0, \quad 2 \top 4 = \frac{2}{2} - 4 = -3.$$

(الف) حاصل هر یک از عبارتهای زیر را بیابید.

$$3 \top (5 \perp 7) \cdot (3 \top 5) \perp 7 \cdot$$

$$(2 \top 6) \perp (-3 \top (-2)) \cdot -4 \perp (3 \top (-1)) \cdot$$

(ب) حاصل $x + y$ با کدامیک از موردهای زیر برابر است؟

$$(x) \perp (-2y) \cdot (2x) \top (-y) \cdot$$

B : دو واحد بیشتر از نصف ورودی

C : منهای دو برابر ورودی ستون «ب»

D : یک واحد کمتر از یک چهارم ورودی

الف) خروجی هر ستون از جدول زیر را برحسب x به دست آورید.

ب) اگر در خانه زیر خانه D بنویسیم $35y^2$ و عملیات را به طور معکوس انجام دهیم، در خانه بالای خانه A چه عبارتی برحسب y به دست می آید؟

ستون «الف»	ستون «ب»	ستون «ج»	ستون «د»
ورودی	یک واحد کمتر از خروجی «الف»	شش برابر خروجی ستون «ب»	سه واحد کمتر از خروجی ستون «ج»
A	B	C	D
خروجی			

دستور A یعنی ورودی را قرینه و سپس مجذور (توان دوم) می کنیم: $x^2 = (-x)^2$.

الف) ستون «الف»: $x^2 = (-x)^2$ (خروجی).

ستون «ب»: ورودی $x^2 - 1$ (یک واحد کمتر از خروجی «الف»)، خروجی B: $\frac{x^2 + 3}{2} + 2 = \frac{x^2 - 1}{2}$.

ستون «ج»: ورودی شش برابر خروجی «ب»: $3(x^2 - 1) = 3x^2 - 3$. دستور C «منهای دو برابر ورودی ستون «ب»» است؛ طبق متن، به ورودی ستون «ب» (نه ورودی ستون «ج» اشاره می کند: $-2(x^2 - 1) = -2x^2 + 2$.

ستون «د»: ورودی سه واحد کمتر از خروجی «ج»: $-2x^2 + 2 - 3 = -2x^2 - 1$. خروجی D: $\frac{-2x^2 - 1}{4} - 1 = \frac{-2x^2 - 5}{4}$.

ستون «الف»	ستون «ب»	ستون «ج»	ستون «د»
ورودی	$x^2 - 1$	$3x^2 + 9$	$-2x^2 - 1$
دستور	A	B	D
خروجی	x^2	$\frac{x^2 + 3}{2}$	$\frac{-2x^2 + 5}{4}$

ب) خروجی ستون «د» برابر $35y^2$ است. عملیات را معکوس می کنیم:

خروجی D = ورودی $\div 4 - 1$ ورودی ستون «د» $= 140y^2 + 4 = 4(35y^2 + 1)$.

ورودی «د» = خروجی «ج» - 3 $\leftarrow$ خروجی «ج» $= 140y^2 + 7$.

خروجی «ج» = $-2 \times$ (ورودی ستون «ب») $\leftarrow$ ورودی ستون «ب» $= -\frac{140y^2 + 7}{2}$.

ورودی «ب» = خروجی «الف» - 1 $\leftarrow$ خروجی «الف» $= -\frac{140y^2 + 7}{2} + 1 = -\frac{140y^2 + 5}{2}$.

خروجی «الف» $= x^2 = (-x)^2$ ؛ پس باید $x^2 = -\frac{140y^2 + 5}{2}$ باشد.

پاسخ: عبارت به دست آمده $-\frac{140y^2+5}{p}$ است (مربع عدد ورودی). این عبارت به ازای هر عدد y منفی است و چون مربع هر عدد حقیقی نامنفی است، هیچ عدد حقیقی ای را نمی توان در خانه بالای A نوشت؛ یعنی با این خروجی، عملیات به طور معکوس به عدد حقیقی نمی رسد.

تمرین ۱۲

صفحه ۶۳

۲۲

۱۲. اگر k تا چندضلعی منتظم در یک رأس مشترک باشند به طوری که این چندضلعی ها روی هم قرار نگرفته باشند و دورتادور رأس مشترک را پوشانده باشند، به آن نقطه مشترک، نقطه گرهی از مرتبه k می گویند. برای مثال در شکل زیر، نقطه A یک نقطه گرهی از مرتبه ۴ است.

الف) در شکل بالا چند نقطه گرهی وجود دارد. مرتبه هر نقطه گرهی را مشخص کنید.

ب) سارا و دانا می خواستند بدانند با یک مثلث متساوی الاضلاع، یک هفت ضلعی منتظم و یک ۴۲ ضلعی منتظم، یعنی $(۳, ۷, ۴۲)$ ، می توان نقطه گرهی ساخت یا نه. آن دو به صورت زیر عمل کردند.

روش سارا برای بررسی وجود نقطه گرهی در $(۳, ۷, ۴۲)$: کافی است در رأس مشترک از این سه چندضلعی منتظم، مجموع زاویه ها برابر ۳۶۰° باشد.
$$\frac{(۳-۲) \times ۱۸۰^\circ}{۳} + \frac{(۷-۲) \times ۱۸۰^\circ}{۷} + \frac{(۴۲-۲) \times ۱۸۰^\circ}{۴۲} = ۳۶۰^\circ$$
 بنابراین این چندضلعی های منتظم می توانند نقطه گرهی بسازند.

روش دانا برای بررسی وجود نقطه گرهی در $(۳, ۷, ۴۲)$: کافی است درستی تساوی زیر را برای چندضلعی های

منتظم داده شده بررسی کنیم. $۳ - ۲ = ۲ \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$ که a, b و c تعداد اضلاع هریک از چندضلعی های

منتظم داده شده است. چون $۳ - ۲ = ۲ \left(\frac{1}{۳} + \frac{1}{۷} + \frac{1}{۴۲} \right)$ پس این چندضلعی های منتظم می توانند نقطه گرهی بسازند.

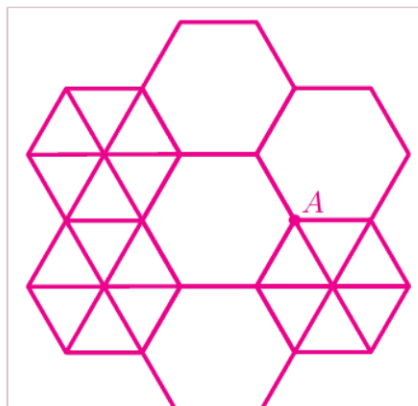
ج) فرض کنید a, b, c و d تعداد اضلاع چهار چندضلعی منتظم باشند. روش دانا را برای بررسی وجود نقطه گرهی در (a, b, c, d) به کار گیرید.

د) با کدام یک از قسمت های زیر می توان یک نقطه گرهی ساخت؟

$(۳, ۴, ۵, ۶)$ $(۳, ۴, ۴, ۶)$ $(۴, ۶, ۱۲)$ $(۵, ۵, ۱۰)$

ه) چه ارتباطی بین راه حل سارا و دانا وجود دارد؟

و) چرا با هفت تا چندضلعی منتظم نمی توان نقطه گرهی ساخت؟



الف) هر نقطه‌ای که مجموع زاویه‌های چندضلعی‌های پیرامونش 360° شود، گرهی است. زاویه داخلی شش‌ضلعی منتظم 120° و مثلث متساوی‌الاضلاع 60° است. شکل ۷ شش‌ضلعی دارد (یکی در وسط و شش تا اطراف آن)؛ سه شش‌ضلعی (بالا-چپ، پایین-چپ و پایین-راست) با شش مثلث پر شده‌اند. نقطه‌های گرهی ۹ تا هستند:

مرتبۀ	چندضلعی‌های پیرامون آن	نقطه
۶	۶ مثلث: $6 \times 60^\circ = 360^\circ$	مرکز هر یک از ۳ شش‌ضلعی پر شده با مثلث (۳ نقطه)
۵	شش‌ضلعی وسط + ۲ مثلث بالا-چپ + ۲ مثلث پایین-چپ: $4 \times 60^\circ + 120^\circ$	رأس چپ شش‌ضلعی وسط
۴	شش‌ضلعی وسط + شش‌ضلعی کناری + ۲ مثلث: $60^\circ + 60^\circ + 120^\circ + 120^\circ$	رأس بالا-چپ، رأس پایین-چپ و رأس پایین-راست شش‌ضلعی وسط، و نقطه A (۴ نقطه)
۳	۳ شش‌ضلعی: $3 \times 120^\circ = 360^\circ$	رأس بالا-راست شش‌ضلعی وسط (۱ نقطه)

پاسخ: ۹ نقطه گرهی: یکی از مرتبه ۳، چهارتا (از جمله A) از مرتبه ۴، یکی از مرتبه ۵ و سه تا از مرتبه ۶. (رأس‌های بیرونی شش‌ضلعی‌های کناری گرهی نیستند، چون پیرامونشان کامل پوشیده نشده است.)

ج) زاویه داخلی چندضلعی منتظم n ضلعی $\frac{(n-2) \times 180^\circ}{n}$ است. باید مجموع چهار زاویه 360° شود؛ با تقسیم بر

$$180^\circ \text{ داریم } 2 = \sum \left(1 - \frac{2}{n_i}\right) = 2 \text{ که برای چهار چندضلعی می‌شود } 2 = \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}\right) - 2 \text{ یعنی}$$

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} = 1 \iff 4 - 2 = 2 \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}\right)$$

د) برای سه چندضلعی باید $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{2}$ و برای چهار چندضلعی $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} = 1$ شود:

○ $\frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10} = \frac{1}{2}$: (۵، ۵، ۱۰) ✓ (زاویه‌ها $108^\circ + 108^\circ + 144^\circ = 360^\circ$)

○ $\frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{1}{2}$: (۴، ۶، ۱۲) ✓ (زاویه‌ها $90^\circ + 120^\circ + 150^\circ = 360^\circ$)

○ $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = 1$: (۳، ۴، ۴، ۶) ✓ (زاویه‌ها $120^\circ + 90^\circ + 90^\circ + 60^\circ = 360^\circ$)

○ $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} = \frac{57}{60} \neq 1$: (۳، ۴، ۵، ۶) ✗ (زاویه‌ها $120^\circ + 90^\circ + 108^\circ + 120^\circ = 378^\circ$)

پاسخ: با (۵، ۵، ۱۰)، (۴، ۶، ۱۲) و (۳، ۴، ۴، ۶) می‌توان نقطه گرهی ساخت، ولی با (۳، ۴، ۵، ۶) نمی‌توان.

ه) هر دو یک شرط را بررسی می‌کنند. شرط سارا $\sum \frac{(n_i-2) \times 180^\circ}{n_i} = 360^\circ$ است؛ اگر دو طرف را بر ۱۸۰ تقسیم و

جمله‌ها را $1 - \frac{2}{n_i}$ بنویسیم، به $2 = \sum \frac{1}{n_i} - 2$ یعنی تساوی دانا می‌رسیم. پس تساوی دانا همان شرط سارا است که ساده شده و فقط حساب را ساده‌تر می‌کند.

و) زاویه داخلی هر چندضلعی منتظم دست‌کم 60° است (مثلث متساوی‌الاضلاع کمترین است و بقیه بزرگ‌ترند). مجموع زاویه‌های هفت چندضلعی دست‌کم $420^\circ = 7 \times 60^\circ$ است که از 360° بیشتر است؛ پس

دور رأس جا نمی‌شوند. (با شرط دانا: $\sum \frac{1}{n_i} \leq \frac{7}{3} < \frac{5}{2}$ اما باید برابر $\frac{5}{2} = \frac{7-2}{2}$ شود.)

۱. کدامیک از تساوی‌های زیر، تجزیه یک عبارت جبری را نشان می‌دهد؟

(الف) $x^2 + x + 1 = x(x+1) + 1$ (ب) $x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$

(ج) $(x-1)a - a(1-x) = a(x-2)$ (د) $2y^2 + 5y = 2y\left(y + \frac{5}{2}\right)$

تجزیه یعنی نوشتن یک عبارت به صورت حاصل ضرب عبارت‌های ساده‌تر (و البته تساوی درست باشد).

○ الف) تساوی درست است ولی سمت راست حاصل ضرب نیست (حاصل ضرب به علاوه ۱ است) ← تجزیه نیست.

○ ب) $(x+1)^2 = (x+1)(x+1)$ حاصل ضرب است و تساوی درست است ← تجزیه است.

○ ج) سمت چپ: $a(x-1) - a(1-x) = a(x-1-1+x) = a(2x-2)$ که با $a(x-2)$ برابر نیست؛ تساوی نادرست است ← تجزیه نیست.

○ د) $2y\left(y + \frac{5}{2}\right) = 2y^2 + 5y$ و سمت راست حاصل ضرب است ← تجزیه است.

پاسخ: (ب) و (د).

۲. با تبدیل به ضرب، صورت و مخرج هر کسر را ساده کنید.

(الف) $\frac{x \times 2^a - y \times 2^a}{x-y}$, (ب) $\frac{42xy^3 - 35x^2y}{7xy}$, ($xy \neq 0$)

الف) در صورت، 2^a عامل مشترک است: $x \times 2^a - y \times 2^a = 2^a(x-y)$. پس $\frac{2^a(x-y)}{x-y} = 2^a$ (چون $x \neq y$ می‌توان ساده کرد).

ب) در صورت $7xy$ عامل مشترک است: $42xy^3 - 35x^2y = 7xy(6y^2 - 5x)$. پس $\frac{7xy(6y^2 - 5x)}{7xy} = 6y^2 - 5x$ (چون $xy \neq 0$).

پاسخ: الف) 2^a (ب) $6y^2 - 5x$

۳. در زیر، از $x = 1$ نتیجه شده $0 = 1$. ایراد کجاست؟

$$x = 1 \Rightarrow x^2 = x$$

$$\Rightarrow x^2 - x = 0$$

$$\Rightarrow x(x-1) = 0$$

$$\Rightarrow x(x-1)/(x-1) = 0/(x-1)$$

$$\Rightarrow x = 0$$

$$\Rightarrow 1 = 0.$$

ایراد در گام چهارم است، جایی که دو طرف تساوی $x(x-1) = 0$ را بر $x-1$ تقسیم کرده‌ایم. چون فرض کرده‌ایم $x \neq 1$ ، پس $x-1 \neq 0$ است و تقسیم بر صفر مجاز نیست (تعریف نشده است). به همین دلیل نتیجه‌های بعدی ($x=0$ و $1=0$) بی‌اعتبارند.

نکته: ساده کردن $x-1$ فقط وقتی مجاز است که $x \neq 1$ باشد.

تمرین ۴

صفحه ۶۵

۲۶

۴. هر یک از عبارات زیر را تجزیه کنید.

(الف) $(u+1)^2 - 3(u+1) + (a-1)^2 + (18-a)$ (ب)

(ج) $(b-2)(b-4) + 4b - 8$ (د) $a(a+5) - a(7-a)$

(ه) $ab - a + b - 1$ (و) $(t-1)^2 + t(t-1) + 8(t-1)$

(ز) $xz + xw - yz - yw$ (ح) $tv - tr - kv + kr$

(ط) $xw - 2xz - yw + 2yz$ (ی) $5ac - 35bc - 14bd + 2ad$

○ (الف) عامل مشترک $u+1$: $(u+1)[(u+1) - 3] = (u+1)(u-2)$

○ (ب) $18 - a = -(a-18)$ پس $(a-18)^2 - (a-18) = (a-18)(a-18-1) = (a-18)(a-19)$

○ (ج) $a[(a+5) - (7-a)] = a(2a-2) = 2a(a-1)$

○ (د) $4b - 8 = 4(b-2)$ پس $(b-2)(b-4) + 4(b-2) = (b-2)(b-4+4) = b(b-2)$

○ (ه) عامل مشترک $t-1$: $(t-1)[(t-1) + t + 8] = (t-1)(2t+9)$

○ (و) $a(b-1) + (b-1) = (b-1)(a+1)$

○ (ز) $x(z+w) - y(z+w) = (z+w)(x-y)$

○ (ح) $t(v-r) - k(v-r) = (v-r)(t-k)$

○ (ط) $w(x-y) - 2z(x-y) = (x-y)(w-2z)$

○ (ی) $5c(a-7b) + 2d(a-7b) = (a-7b)(5c+2d)$

تمرین ۵

صفحه ۶۶

۲۷

۵. در تجزیه عبارت $12ac + 12bd - 24bc - 6ad$ کدام عبارت زیر نمی‌تواند ظاهر شود؟

(الف) $2c - d$ (ب) $2c - 4c$ (ج) $2b - a$

ابتدا جمله‌ها را دسته‌بندی می‌کنیم:

$$12ac - 24bc + 12bd - 6ad = 12c(a - 2b) - 6d(a - 2b)$$

$$= (a - 2b)(12c - 6d) = 6(a - 2b)(2c - d)$$

پس عامل‌های تجزیه (تا ضرب در عدد ثابت) فقط $a - 2b$ و $2c - d$ هستند و هر عاملی از عبارت باید مضربی ثابت از اینها (یا ضرب آنها در هم) باشد:

- الف) $2c - d \leftarrow$ همان عامل.
 - ب) $2d - 4c = -2(2c - d) \leftarrow$ مضرب ثابت عامل (مثلاً $(2d - 4c)(6b - 3a)$ که برابر عبارت است).
 - ج) $2b - a = -(a - 2b) \leftarrow$ مضرب ثابت عامل.
 - د) $3a - 6b = 3(a - 2b) \leftarrow$ مضرب ثابت عامل (مثلاً $(4c - 2d)(3a - 6b)$).
 - ه) $12c - 6b = 6(2c - b) \leftarrow$ مضرب $a - 2b$ و $2c - d$ نیست؛ نمی‌تواند ظاهر شود.
 - و) $6a - d \leftarrow$ مضرب هیچ‌کدام از دو عامل نیست؛ نمی‌تواند ظاهر شود.
- پاسخ: عبارت‌های (ه) و (و) نمی‌توانند در تجزیه ظاهر شوند (عبارت‌های الف، ب، ج و د ظاهر می‌شوند).

تمرین ۶

صفحه ۶۶

۲۸

۶. عبارت جبری $3x\left(2x - \frac{1}{3}\right)(x - 18)$ را در نظر بگیرید.

الف) این عبارت جبری را ساده کنید.

ب) مقدار این عبارت جبری را برای $x = \frac{1}{6}$ به دست آورید.

ج) دو عدد بیابید که برای آنها، حاصل عبارت جبری با حاصل قسمت «ب» برابر باشد.

د) یک عبارت جبری با تنها یک نوع متغیر بیابید که با جایگذاری چهار مقدار عددی متفاوت، به عدد ۳- برسیم.

نوشته‌ای برای موفقیت

الف) $3x\left(2x - \frac{1}{3}\right)(x - 18) = 6x^2 - x$ و $3x\left(2x - \frac{1}{3}\right)(x - 18) = 6x^3 - 108x^2 - x^2 + 18x = 6x^3 - 109x^2 + 18x$.

ب) $2x - \frac{1}{3} = \frac{2}{6} - \frac{1}{3} = 0$ پس حاصل ضرب ۰ است. (امتحان با عبارت ساده‌شده:

$$\left(\frac{6}{36} - \frac{109}{36} + 3\right) = \frac{1 - 109 + 108}{36} = 0$$

ج) حاصل قسمت «ب» برابر ۰ است؛ حاصل ضرب وقتی صفر است که یکی از عامل‌ها صفر باشد: $x = 0$ (عامل

$3x$) و $x = 18$ (عامل $x - 18$). بنابراین دو عدد ۰ و ۱۸ هستند. (عدد $\frac{1}{6}$ نیز همین‌طور است.)

د) عبارت $3 - x(x - 1)(x - 2)(x - 3)$ را در نظر می‌گیریم. برای ۰، ۱، ۲، ۳ $x = 0$ یکی از عامل‌ها صفر است و مقدار عبارت ۳- می‌شود. (پاسخ‌های دیگر هم ممکن است.)

۷. برای مرکب بودن هر یک از اعداد زیر دلیل بیاورید.

(الف) $۹۷ + ۱ + ۲ + ۳ + \dots + ۸۳$ (ب) $۱ \times ۲ \times ۳ \times \dots \times ۹۷ + ۸۳$

(ج) $۱ + ۳^{۱۰۱}$ (د) $۱^۲ + ۲^۲ + ۳^۲ + \dots + ۳۱^۲$

(الف) $۹۷ + ۱ + ۲ + \dots + ۸۳ = ۹۷ \times ۹۸ / ۲ = ۹۷ \times ۴۹$ حاصل ضرب دو عدد بزرگتر از ۱ است، پس مرکب است.

(ب) $۱ \times ۲ \times \dots \times ۹۷$ بر ۸۳ بخش پذیر است (۸۳ یکی از عامل هاست). پس کل عدد بر ۸۳ بخش پذیر است و از ۸۳ بزرگتر است؛ مرکب است: $۸۳ \left(\frac{۹۷!}{۸۳} + ۱ \right)$.

(ج) $۳^{۱۰۱}$ یک عدد فرد است که باقی مانده آن بر ۴ برابر ۳ است (زیرا $۳، ۳۳، ۳۵، \dots$ بر ۴ باقی مانده ۳ دارند؛ $-۱ \equiv ۳$ و توان فرد -۱ می دهد). پس $۳^{۱۰۱} + ۱$ بر ۴ بخش پذیر است و از ۴ بزرگتر است؛ مرکب است.

(د) مجموع مربع ها را از نظر زوج و فرد بررسی می کنیم: مربع هر عدد فرد، فرد و مربع هر عدد زوج، زوج است. بین ۱ تا ۳۱ تعداد ۱۶ عدد فرد داریم؛ مجموع ۱۶ عدد فرد (مربع ها) زوج است و مجموع مربع های زوج نیز زوج است. پس مجموع کل زوج و بزرگتر از ۲ است؛ بر ۲ بخش پذیر است و مرکب است. (در واقع مجموع برابر ۱۰۴۱۶ است.)

۸. عددهای طبیعی m و n در تساوی $۶۵m = ۵۶n$ صدق می کنند. ثابت کنید $m + n$ عددی مرکب است.

$۵۶ = ۷ \times ۲^3$ و $۶۵ = ۵ \times ۱۳$ هیچ عامل اول مشترکی ندارند. چون $۵۶m \mid ۶۵$ و ۶۵ با ۵۶ نسبت به هم اولند، $m \mid ۶۵$. پس $m = ۶۵k$ برای یک عدد طبیعی k .

آن گاه $۶۵n = ۵۶ \times ۶۵k = ۱۲۱k$ و $n = ۱۲۱k / ۶۵$. بنابراین $m + n = ۶۵k + ۱۲۱k = ۱۸۶k$.

این عدد بر ۱۱ بخش پذیر است و از ۱۱ بزرگتر است (کمترین مقدار آن ۱۲۱ است)؛ پس مرکب است.

۹. فرض کنید m و n دو عدد طبیعی باشند که $n > ۲$ و $m > ۳$. ثابت کنید عبارت های زیر عددی مرکب است.

(الف) $۱ + ۲ + ۳ + \dots + n$ (ب) $m - ۲ + m \times \dots \times ۲ \times ۱$

(ج) $۲n^۲ - n^۳ - mn$ (د) $m^۳ - n - m + ۱$

(ه) $m^۲ + m - n^۲ - ۱$ (و) $m^۲n - mn + n - m^۲ + m - ۱$

الف) $\frac{n(n+1)}{2} = 1 + 2 + \dots + n$. اگر n فرد باشد ($n \geq 3$)، n و $(n+1)/2 \geq 2$ دو عدد بزرگتر از ۱ هستند که حاصل ضرب آنهاست. اگر n زوج باشد ($n \geq 4$)، حاصل ضرب $n/2 \geq 2$ و $n+1 \geq 5$ است. در هر دو حالت مرکب است.

ب) چون $m \geq 4$ ، عدد $m - 2$ (که $2 \leq m - 2 < m$) یکی از عوامل $1 \times 2 \times \dots \times m$ است. پس $m! + m - 2 = (m - 2) \left(\frac{m!}{m-2} + 1 \right)$ که هر دو عامل بزرگتر از ۱ هستند ($m - 2 \geq 2$)؛ مرکب است.

ج) $n^3 - 2n^2 = n \cdot n(n - 2)$ با $n \geq 3$ عامل‌ها $n \geq 3$ و $n(n - 2) \geq 3$ هستند؛ مرکب است.

د) $(m - 1)(n - 1) = mn - n - m + 1$ با $m - 1 \geq 3$ و $n - 1 \geq 2$ ؛ مرکب است.

ه) $m^2n - mn + n - m^2 + m - 1 = (n - 1)(m^2 - m + 1)$ (امتحان: ضرب را باز کنید). $n - 1 \geq 2$ و $m^2 - m + 1 \geq 13$ ؛ مرکب است.

و) $mn^2 + m - n^2 - 1 = m(n^2 + 1) - (n^2 + 1) = (m - 1)(n^2 + 1)$ با $m - 1 \geq 3$ و $n^2 + 1 \geq 10$ ؛ مرکب است.

ز) $2mn - 4n - m + 2 = 2n(m - 2) - (m - 2) = (m - 2)(2n - 1)$ با $m - 2 \geq 2$ و $2n - 1 \geq 5$ ؛ مرکب است.

ح) $mn - 2n + m - 2 = n(m - 2) + (m - 2) = (m - 2)(n + 1)$ با $m - 2 \geq 2$ و $n + 1 \geq 4$ ؛ مرکب است.

تمرین ۱۰

صفحه ۶۷

۳۲

۱۰. الف) حاصل کدامیک از عبارتهای زیر عددی اول است؟

$$۷۷ + ۷۸ + ۷۹ + ۸۰ + ۸۱ + ۸۲ + ۸۳ + ۸۴ + ۸۵ + ۸۶ + ۸۷ + ۸۸ + ۸۹ + ۹۰$$

$$۱۳۹۴ + ۱۳۹۵ + ۱۳۹۶ + ۱۳۹۷ + ۱۳۹۸ + ۱۳۹۹ + ۱۴۰۰ + ۱۴۰۱ + ۱۴۰۲ + ۱۴۰۳ + ۱۴۰۴ + ۱۴۰۵ + ۱۴۰۶ + ۱۴۰۷ + ۱۴۰۸ + ۱۴۰۹ + ۱۴۱۰$$

ب) آیا ممکن است مجموع پنج عدد طبیعی متوالی، عددی اول باشد؟ برای پاسخ خود دلیل بیاورید.

الف) $۲۰ = ۲ + ۳ + ۴ + ۵ + ۶$ ، $۳۹۵ = ۵ + ۷۷ + \dots + ۸۱$ ، $۶۹۸ = ۵ + ۱۳۹۶ + \dots + ۱۳۹۸$. هیچ کدام اول نیست.

ب) خیر. پنج عدد طبیعی متوالی را $n, n+1, n+2, n+3, n+4$ می‌گیریم: $n + (n+1) + (n+2) + (n+3) + (n+4) = 5n + 10 = 5(n+2)$ چون $n \geq 1$ ، عدد $n+2 \geq 3$ و مجموع حاصل ضرب ۵ و عددی بزرگتر از ۱ است؛ پس هرگز اول نیست.

تمرین ۱۱

صفحه ۶۷

۳۳

۱۱. برای درستی یا نادرستی هر یک از عبارتهای زیر دلیل بیاورید.

الف) حاصل ضرب دو عدد فرد، عددی فرد است.

ب) حاصل ضرب سه عدد صحیح متوالی مضرب ۳ است.

(ج) برای هر عدد طبیعی n ، مقدار $2n^2 + 29$ عددی اول است.

(د) مجموع سه عدد زوج متوالی بر ۶ بخش پذیر است.

(ه) حاصل ضرب سه عدد زوج متوالی مضرب ۲۴ است.

(و) برای هر عدد طبیعی m که m مضرب ۴۱ نباشد، مقدار $m^2 + m + 41$ عددی اول است.

(ز) اگر a و b دو عدد صحیح باشند که باقی مانده تقسیم آنها بر ۶ برابر ۵ باشد، آنگاه باقی مانده تقسیم ab بر ۶ برابر ۱ است.

(ح) اگر از مربع یک عدد فرد یک واحد کم کنیم، حاصل بر ۸ بخش پذیر است.

(ط) هر مضرب ۴ را می توان به صورت تفاضل مربع دو عدد صحیح نوشت.

(ی) تفاضل دو عدد مربع کامل، مضرب ۴ است.

- الف) درست. $1 + 2(2ab + a + b) = 2ab + 2a + 2b + 1 = (2a + 1)(2b + 1)$ فرد است.
- ب) درست. از سه عدد صحیح متوالی $n, n+1, n+2$ دقیقاً یکی مضرب ۳ است (باقی مانده n بر ۳ برابر ۰ یا ۱ یا ۲ است؛ اگر ۰ خود n ، اگر ۱ عدد $n+2$ و اگر ۲ عدد $n+1$ مضرب ۳ است). پس حاصل ضرب مضرب ۳ است.
- ج) نادرست. مثال نقض: $n = 29 \leftarrow n = 29 \Rightarrow 29 \times 59 = 1711 = 29(1 + 58) = 29 + 2 \times 29^2$ که اول نیست. (برای $n = 1, \dots, 28$ همه اولند).
- د) درست. $2k + (2k+2) + (2k+4) = 6k + 6 = 6(k+1)$.
- ه) درست. $2k(2k+2)(2k+4) = 8k(k+1)(k+2)$ و حاصل ضرب سه عدد صحیح متوالی $k(k+1)(k+2)$ مضرب ۳ (طبق «ب») و مضرب ۲ (یکی از آنها زوج) است، پس مضرب ۶ است؛ در نتیجه حاصل مضرب $8 \times 6 = 48$ و بنابراین مضرب ۲۴ است.
- و) نادرست. مثال نقض: $m = 40$ (مضرب ۴۱ نیست) $\leftarrow m = 40 \Rightarrow 40^2 + 40 + 41 = 1681 = 41^2$ اول نیست. (برای $m = 1, \dots, 39$ همه اولند).
- ز) درست. $a = 6p + 5$ و $b = 6q + 5 \leftarrow b = 6q + 5 \Rightarrow ab = 36pq + 30p + 30q + 25 = 6(6pq + 5p + 5q + 4) + 1 \leftarrow ab = 36pq + 30p + 30q + 25$ که باقی مانده آن بر ۶ برابر ۱ است.
- ح) درست. $4k(k+1) = 4k^2 + 4k = (2k+1)^2 - 1$ و $k(k+1)$ حاصل ضرب دو عدد متوالی و زوج است؛ پس عدد مضرب $8 = 2 \times 4$ است.
- ط) درست. $4k = (k+1)^2 - (k-1)^2$ (امتحان: $((k+1)^2 - (k-1)^2 = 4k)$).
- ی) نادرست. مثال نقض: $5 = 3^2 - 2^2$ (یا $3^2 - 1^2 = 8$) مضرب ۴ نیست.

تمرین ۱۲

صفحه ۶۷

۳۴

۱۲. عبارت های جبری زیر را ساده کنید.

الف) $(z^4 + 2z + 1)(z^2 - 5) - (z + 1)^2$ ب) $(x^3 - 1)(x^2 - 25) - (x + 1)^2$

(ج) $(z^2 - 5)(z + 1) - (z^2 + 2z + 1) = (x^3 - 1) - (x^2 - 25)(x + 1)^2$ (د)

(الف) $(z + 1)(z^2 + 2z + 1) = z^3 + 2z^2 + z + z^2 + 2z + 1 = z^3 + z^2 + 2z^2 + 3z + 1$
 پس $z^2 - 5 - z^3 - z^2 - 3z - 1 = -z^3 - z^2 - 3z - 6$

(ب) $(x^3 - 1)(x^2 - 25) = x^5 - 25x^3 - x^2 + 25$ و $(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$ پس $x^5 - 25x^3 - 2x^2 - 2x + 24$

(ج) $(z^2 - 5)(z + 1) = z^3 + z^2 - 5z - 5$ پس $z^3 + z^2 - 5z - 5 - z^3 - z^2 - 7z - 6 = -12z - 11$

(د) $(x^2 - 25)(x + 1)^2 = (x^2 - 25)(x^2 + 2x + 1) = x^4 + 2x^3 - 24x^2 - 50x - 25$
 پس $x^3 - 1 - x^4 - 2x^3 + 24x^2 + 50x + 25 = -x^4 - x^3 + 24x^2 + 50x + 24$

تمرین ۱۳

صفحه ۶۸

۳۵

۱۳. در این مسئله منظور از P یک جمله است که در آن فقط متغیر a با توان ۱ به کار رفته است. برای مثال P می تواند برابر $2a, -a, a, -\sqrt{3}a$ یا $\frac{2}{9}a$ باشد؛ ولی P نمی تواند برابر $a + 2, 3b, 2, -ab, a^2 + a, a^2$ یا ۵ باشد. در این مسئله منظور از R نیز یک جمله است که در آن فقط متغیر b با توان ۱ به کار رفته است. الف) باتوجه به تعریف بالا، P برابر کدامیک از عبارت های زیر می تواند باشد؟ R برابر کدامیک از عبارت های زیر می تواند باشد؟

$-3a, 5b, a + b, ab, 12a, b + 1, -18, b^2, -a^2, \frac{1}{5}a, \sqrt{2}b.$

ب) در جدول صفحه بعد، باتوجه به تعریف بالا، در هر پرانتز P و R را طوری تعیین کنید که تعداد جمله های حاصل ضرب عبارت جبری هر ردیف، برابر با عدد ستون سمت راست باشد. توجه کنید که لازم نیست جمله ای که به جای P یا R در پرانتز اول و دوم هر عبارت جبری استفاده می کنید برابر باشد.

ایران توانمند
توشه ای برای موفقیت

برای نمونه، دو جواب برای ردیف اول به دست می آوریم: $-a^2 + ad + ae - ab + bd + be = (a+d+e)(a+b+c)$ و $a^2 + ad + ae + ab + bd + be + ac + cd + ce = (a+d+e)(a+b+c)$

تعداد جمله های حاصل ضرب	عبارت جبری
۹	$(P + R + c)(P + d + e)$
۸	$(P + R + c)(P + R + d)$
۷	$(P + R + c)(P + R + d)$
۶	$(P + R + c)(P + R + c)$
۵	$(P + R - c)(P + R + c)$
۴	$(P + R + c)(P + R + c)$
۳	$(a^2 + P + 1)(a^2 + a + 1)$
۲	$(2a^2 + P + 1)(2a^2 + P + 1)$
۲	$(a^2 + P + 1)(a^2 + P + 1)$

الف) P باید به شکل «عدد ثابت $\times a$ » و R به شکل «عدد ثابت $\times b$ » باشد (یک جمله، فقط یک متغیر، توان ۱).

○ P می تواند $-3a$ ، $12a$ یا $\frac{1}{4}a$ باشد.

○ R می تواند $5b$ یا $\sqrt{2}b$ باشد.

○ بقیه نمی شوند: $a+b$ و $b+1$ دو جمله اند؛ ab دو متغیر دارد؛ $-a^2$ ، b^2 توان ۲ دارند؛ -18 متغیر ندارد؛ $5b$ و $\sqrt{2}b$ به جای P نمی شوند (متغیرشان b است) و $\frac{1}{2}a$ ، $12a$ ، $-3a$ به جای R نمی شوند.

ب) فرض کنید در پرانتز اول $P = ka$ و $R = mb$ و در پرانتز دوم $P = na$ و $R = lb$ باشد (ضریب ها ناصفر). با خاصیت پخشی حاصل ضرب را می نویسیم و جمله های متشابه را (مثلاً ab از ضرب های $ka \cdot lb$ و $mb \cdot na$) جمع می کنیم. جمله های a^2 ، b^2 ، c^2 (در صورت وجود) هیچ گاه حذف نمی شوند.

توشه ای برای موفقیت

ردیف	عبارت	انتخاب	حاصل ضرب ساده شده	تعداد
۱	$(P+R+c)(P+d+e)$	$P=2a, R=b, P=-3a$	$(2a+b+c)(-3a+d+e)$ ، نه جمله متمایز: $a^2, ab, ac, ad, ae, bd, be, cd, ce$	۹
۲	$(P+R+c)(P+R+d)$	$P=a, R=b$	$(a+b+c)(a+b+d) = a^2 + 2ab + ac + ad + b^2 + bc + bd + cd$	۸
۳	$(P+R+c)(P+R+d)$	$P=a, R=b; P=-a, R=b$	$(a+b+c)(-a+b+d) = -a^2 + ad + b^2 + bd - ac + bc + cd$ (جمله های ab حذف شد)	۷
۴	$(P+R+c)(P+R+c)$	$P=a, R=b$	$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$	۶
۵	$(P+R-c)(P+R+c)$	$P=a, R=b; P=a, R=2b$	$(a+b-c)(a+2b+c) = a^2 + 3ab + 2b^2 - bc - c^2$ (جمله های ac حذف شد)	۵
۶	$(P+R+c)(P+R+c)$	$P=a, R=b; P=a, R=-b$	$(a+b+c)(a-b+c) = a^2 + 2ac + c^2 - b^2$ (جمله های ab و bc حذف شد)	۴
۷	$(a^2+P+1)(a^2+a+1)$	$P=-a$	$(a^2-a+1)(a^2+a+1) = a^4 + a^2 + 1$	۳
۸	$(2a^2+P+1)(2a^2-2a+1)$	$P=2a; P=-2a$	$(2a^2+2a+1)(2a^2-2a+1) = 4a^4 + 1$	۲
۹	$(a^2+P+1)(a^2+P+1)$	$P=\sqrt{2}a; P=-\sqrt{2}a$	$(a^2+\sqrt{2}a+1)(a^2-\sqrt{2}a+1) = a^4 + 1$	۲

توضیح ردیف های ۷ تا ۹: با $P = ka$ در پرانتز اول و $P = la$ در پرانتز دوم، برای ردیف ۹: $(a^2+ka+1)(a^2+la+1) = a^4 + (k+l)a^3 + (2+kl)a^2 + (k+l)a + 1$ و $k+l=0$ و $2+kl=0$ یعنی $k^2=2$ و $l=-k$ ، برای ردیف ۸ شرط ها $k+l=0$ و $4+kl=0$ و $k=\pm 2$ هستند. برای ردیف ۷ با $P = ka$: $a^4 + (1+k)a^3 + (2+k)a^2 + (k+1)a + 1$ و برای سه جمله ای ماندن باید $k = -1$ (که جمله a^2 باقی بماند).

ایران توئین

وشه ای برای موفقیت

تمرین ۱۴

صفحه ۶۹

۳۶

۱۴. می دانیم a و b دو عدد صحیح هستند. با ذکر دلیل مشخص کنید که تعداد جمله های عبارت

$(x+b)(x^2+ax+1)$ ، پس از ساده کردن چه اعدادی نمی تواند باشد.

$$(x+b)(x^2+ax+1) = x^3 + ax^2 + x + bx^2 + abx + b$$

$$= x^3 + (a+b)x^2 + (ab+1)x + b$$

جمله x^3 همیشه هست و باقی مانده عبارت حداکثر ۳ جمله دیگر دارد؛ پس تعداد جمله ها از ۱ تا ۴ است.

تعداد ۱ ممکن نیست: برای یک جمله ای ماندن باید $b=0$ ، $a+b=0$ و $ab+1=0$ باشد. از دو شرط اول

$a=b=0$ و آن گاه $ab+1=1 \neq 0$ می شود که تناقض است.

تعدادهای ۲ و ۳ و ۴ ممکن اند: $x^3 + x \leftarrow a=0, b=0$ ؛ (جمله ۲) $x^3 + x \leftarrow a=1, b=0$ ؛ (جمله ۳) $x^3 + x^2 + x \leftarrow a=1, b=1$ ؛ (جمله ۴) $x^3 + 2x^2 + 2x + 1$.
پاسخ: تعداد جمله ها نمی تواند ۱ (و نیز ۰ یا بیشتر از ۴) باشد.

تمرین ۱۵

صفحه ۶۹

۳۷

۱۵. باتوجه به تمرین ۲ صفحه ۲۷ به پرسش های زیر پاسخ دهید.

الف) آیا ادعای نینا برای هر عدد طبیعی m درست است؟ چرا؟

ب) آیا ادعای نینا ارتباطی با روش غربال اعداد اول دارد؟

در تمرین ۲ صفحه ۲۷ جدولی ساخته می شود که خانه سطر i و ستون j آن $2ij + i + j$ است: سطر اول ۴، ۷، ۱۰، ...؛ سطر دوم ۷، ۱۲، ۱۷، ... و نینا ادعا می کند اگر m در جدول باشد، $2m+1$ اول نیست و اگر نباشد $2m+1$ اول است.

الف) بله، برای هر عدد طبیعی m درست است. چون $(2i+1)(2j+1) = 2ij + 2i + 2j + 1 = 2(i+j+2ij) + 1$ ، اگر m در جدول باشد $(2i+1)(2j+1) = 2m+1$ (با $i, j \geq 1$) آن گاه $2m+1$ حاصل ضرب دو عدد فرد $2i+1 \geq 3$ و $2j+1 \geq 3$ است و اول نیست. برعکس، اگر $2m+1$ (عددی فرد و $3 \leq$) اول نباشد، حاصل ضرب دو عدد فرد $a \geq 3$ و $b \geq 3$ است؛ $i = (a-1)/2$ و $j = (b-1)/2$ ز عددهای طبیعی اند و $2ij + i + j = m$ در جدول هست. پس اگر m در جدول نباشد $2m+1$ اول است. (برای $m=22: 45 = 5 \times 9$ و $22 = 2 + 4 + 2 \times 2 \times 4$ ؛ برای $m=6: 13$ اول است).

ب) بله. روش غربال (اراتستن) اعداد مرکب را خط می زند و اعداد باقی مانده اولند. اینجا هم جدول نینا اعداد فرد مرکب $2m+1$ را (که حاصل ضرب دو عدد فرد بزرگ تر از ۱ هستند، یعنی «جدول ضرب اعداد فرد $3 \leq$ ») با شماره m نشان می دهد و عددهایی که خط نمی خورند اول اند؛ یعنی روش نینا یک غربال برای اعداد فرد است (غربال سوندارام).

توشه ای برای موفقیت

تمرین ۱

صفحه ۶۹

۳۸

۱. در زیر، هریک از اعداد سمت راست، جواب یکی از معادله های سمت چپ است. هر معادله را به جواب آن وصل کنید.

$$-1 \cdot x^2 + x - 2 = \frac{2x-2}{2} + 1 \cdot$$

$$\bullet \bullet x^3 - x = x^2 - 1 \bullet$$

$$\sqrt{2} \bullet 5x^2 + x = 0 \bullet$$

$$\sqrt{2} + \sqrt{3} \bullet (x^2 - 1)^2 = 8x^2 \bullet$$

هر معادله را حل می‌کنیم:

- $x^2 + x - 2 = \frac{2x-2}{2} + 1 = x - 1 + 1 = x$ پس $x^2 = 2$ و $x = \sqrt{2}$ و $(-\sqrt{2})$ جواب $\sqrt{2}$
- $x^3 - x - x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x(x^2 - 1) - (x^2 - 1) = (x^2 - 1)(x - 1) = 0$ پس $x = 1$ یا $x = -1$ جواب -1
- $5x^2 + x = x(5x + 1) = 0$ پس $x = 0$ یا $x = -\frac{1}{5}$ جواب‌های 0 و $-\frac{1}{5}$
- $(x^2 - 1)^2 = 8x^2$ (دو طرف مثبت‌اند) $\Rightarrow x^2 - 1 = \pm 2\sqrt{2}x$ که $x^2 - 2\sqrt{2}x - 1 = 0$ جواب
- $x = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ دارد. امتحان: $x^2 = 5 + 2\sqrt{6}$ پس $(x^2 - 1)^2 = (4 + 2\sqrt{6})^2 = 40 + 16\sqrt{6} = 8x^2$ ✓

پاسخ: معادله اول $\sqrt{2} \leftarrow$ دوم $-1 \leftarrow$ سوم 0 و $-\frac{1}{5} \leftarrow$ چهارم $\sqrt{2} + \sqrt{3} \leftarrow$.

تمرین ۲

صفحه ۷۰

۳۹

۲. چرا در همه مربع‌های جادویی 3×3 که با اعداد ۱ تا ۹ ساخته می‌شوند، عدد خانه وسط، همیشه ۵ است؟

مجموع عددهای ۱ تا ۹ برابر ۴۵ است. هر سطر مجموع S دارد و سه سطر همه خانه‌ها را می‌پوشانند:
 $3S = 45$ پس $S = 15$.

سطر وسط، ستون وسط و دو قطر را جمع می‌کنیم؛ مجموع آنها $60 = 4 \times 15$ است. در این جمع هر خانه یک بار و خانه وسط (که در هر چهار خط است) چهار بار شمرده شده است؛ یعنی مجموع کل خانه‌ها به اضافه ۳ برابر خانه وسط: $45 + 3S = 60$.

پس $S = 5$. همین است که عدد وسط همیشه ۵ است.

تمرین ۳

صفحه ۷۰

۴۰

۳. برای اندازه‌گیری دما در برخی کشورها از واحد سانتی‌گراد (C) و در برخی کشورها از واحد فارنهایت (F) استفاده می‌شود. آب در صفر درجه سانتی‌گراد و ۳۲ درجه فارنهایت یخ می‌زند. در جدول زیر، تبدیل شده دماهایی از سانتی‌گراد به فارنهایت را مشاهده می‌کنید.

C: 100° 0° -10° -20° -30°

F: 212° 32° 14° -4° -22°

الف) می‌دانیم رابطه بین F و C به صورت $F = mC + n$ است. با توجه به جدول بالا، اعداد m و n را بیابید.

ب) در چه درجه‌ای سانتی‌گراد و فارنهایت یک عدد را نشان می‌دهند؟

الف) از $C = 0$ و $F = 32$: $32 = m \times 0 + n$ پس $n = 32$.

از $C = 100$ و $F = 212$: $F = 100m + 32$ پس $212 = 100m + 32$ و $m = \frac{9}{5}$.

امتحان با بقیه جدول: $14 = 32 + (-10) \times \frac{1}{8}$; $C = -10$; $-4 = 32 + 36$; $C = -20$; $-22 = 32 + 54$; $C = -30$. ✓

پاسخ: $m = \frac{9}{5}$ و $n = 32$ (یعنی $F = \frac{9}{5}C + 32$).

ب) باید $F = C$ باشد: $C = -40 \Rightarrow \frac{4}{5}C = -32 \Rightarrow C = -40$.

پاسخ: در -40 درجه، که هر دو مقیاس -40 را نشان می‌دهند.

تمرین ۴

صفحه ۷۰

۴۱

۴. الف) کدام یک از موارد زیر می‌تواند صورت مسئله‌ای باشد که معادله‌اش به صورت $2x + 3 = 5x$ است؟

- دو دوندۀ روزی سه کیلومتر می‌دوند. پنج دوندۀ روزی چند کیلومتر می‌دوند؟
- قیمت پنج کیلو سیب، سه هزار تومان بیشتر از قیمت دو کیلو از همان سیب است. قیمت سه کیلو سیب چند هزار تومان است؟
- سه روز بعد از دو روز دیگر، پنج‌شنبه خواهد بود. امروز چند شنبه است؟
- دمای شهری که دو برابر دمای آن، سه واحد بیشتر از پنج برابر دمای آن است، چقدر است؟
- ب) با کمک هم‌کلاسی‌هایتان حداقل ۵ مسئله بسازید که معادله آنها به صورت $2x + 3 = 5x$ باشد.

الف) فقط مورد دوم:

- مورد اول: اگر دو دوندۀ روزی ۳ کیلومتر بدوند، هر نفر $\frac{3}{2}$ کیلومتر و پنج نفر $7.5 = 5 \times \frac{3}{2}$ کیلومتر؛ معادله‌اش (تناسب) $\frac{x}{5} = \frac{3}{2}$ است.
 - مورد دوم: قیمت هر کیلو سیب x هزار تومان $\leftarrow$ قیمت ۵ کیلو $5x$ و قیمت ۲ کیلو $2x$ ؛ $5x = 2x + 3$ یعنی $2x + 3 = 5x$ ✓. حل: $3x = 3$ پس $x = 1$ و قیمت سه کیلو ۳ هزار تومان است.
 - مورد سوم: $3 + 2 + x$ روز، معادله‌اش $5 = x + 5$ (با شماره شنبه = ۵) است.
 - مورد چهارم: $2x = 5x + 3$ (جواب $x = -1$) که با $2x + 3 = 5x$ (جواب $x = 1$) یکی نیست.
- پاسخ: مورد دوم (قیمت سیب).

ب) نمونه مسئله‌ها (در همه آنها $x = 1$):

۱. عددی را در نظر بگیرید: اگر دو برابر آن را با ۳ جمع کنیم، با پنج برابر خود عدد برابر می‌شود. آن عدد کدام است؟ ($x = 1$)
۲. قیمت دو دفتر و یک خودکار سه هزار تومانی برابر قیمت پنج دفتر است (همه دفترها هم قیمت). قیمت هر دفتر چند هزار تومان است؟ ($x = 1$ هزار تومان)
۳. در یک ترازو، در یک کفه ۲ وزنه هم‌وزن و یک وزنه ۳ گرمی و در کفه دیگر ۵ وزنه هم‌وزن با آن‌ها قرار دارد و ترازو در تعادل است. وزن هر وزنه چند گرم است؟ ($x = 1$ گرم)

4. ○ علی ۲ ساعت با سرعت ثابت راه رفت و ۳ کیلومتر دیگر هم رفت و رضا ۵ ساعت با همان سرعت راه رفت؛ مسافت‌هایشان برابر شد. سرعت چند کیلومتر بر ساعت است؟ ($x=1$)
5. ○ ضلع یک پنج ضلعی منتظم x سانتی متر است. محیط آن ۳ سانتی متر بیشتر از مجموع دو ضلع آن است. طول ضلع چند سانتی متر است؟ ($x=1$ و $5x = 2x + 3$)

تمرین ۵

صفحه ۷۱

۴۲

۵. ابتدا برای هریک از معادله‌های زیر یک مسئله بسازید و سپس آنها را حل کنید.

(الف) $\frac{4a-6}{2} + 3a = 11 - 2a$

(ب) $x + 2x + 3x + \dots + 10x + 11 = 66$

(ج) $\frac{8y-3}{5} = \frac{6y+10}{4}$

(د) $4x - 8x - 12x - \dots - 48x - 4 = 584$

(الف) مسئله: «نصف چهار برابر یک عدد منهای ۶، به علاوه سه برابر آن عدد، برابر است با ۱۱ منهای دو برابر آن عدد. آن عدد کدام است؟»

$2a - 3 + 3a = 11 - 2a \Rightarrow 5a - 3 = 11 - 2a \Rightarrow 7a = 14 \Rightarrow a = 2$ امتحان: $2a - 3 + 3a = 11 - 2a$ و $11 - 4 = 7$ ✓

(ب) مسئله: «کتابی ۶۶ صفحه‌ای را در ۱۱ روز می‌خوانیم؛ روز اول x صفحه، روز دوم $2x$ صفحه، ...، روز دهم $10x$ صفحه و روز یازدهم ۱۱ صفحه. x چند است؟»

$66 = (1+2+\dots+10)x + 11$ پس $55x = 55$ و $x = 1$.

(ج) مسئله: «اگر ۳ تا از ۸ برابر یک عدد کم کنیم و حاصل را بین ۵ نفر تقسیم کنیم، سهم هر نفر برابر می‌شود با سهم هر نفر در حالتی که ۱۰ تا به ۶ برابر همان عدد اضافه کنیم و بین ۴ نفر تقسیم کنیم. آن عدد کدام است؟»

$4(8y-3) = 5(6y+10) \Rightarrow 32y - 12 = 30y + 50 \Rightarrow 2y = 62 \Rightarrow y = 31$ امتحان: $4(8y-3) = 5(6y+10)$ و $(186+10)/5 = 49$ ✓ $4 = 49$

(د) مسئله: «عدد x داده شده است. ۴ برابر آن را در نظر می‌گیریم و به ترتیب ۸ برابر، ۱۲ برابر، ...، ۴۸ برابر x را از آن کم می‌کنیم و در پایان ۴ واحد دیگر کم می‌کنیم. حاصل ۵۸۴ شده است. x چند است؟»

ضریب‌های کم‌شونده ۸، ۱۲، ۱۶، ...، ۴۸ هستند (۱۱ جمله)؛ مجموعشان $308 = (8 + 48)/2 \times 11$. پس $4x - 308x - 4 = 584$ و $4x - 308x = 588$.

پاسخ: $x = -\frac{588}{304} = -\frac{147}{76}$ (امتحان: $4x - 308x = 588$) ✓

۶. الف) چند مستطیل با طول و عرض طبیعی وجود دارد که محیط آن ۲۰ باشد.
 ب) معادله $2x + 2y = 20$ چند جواب طبیعی دارد؟ همه جواب‌ها را بنویسید.

الف) $20 = (\text{طول} + \text{عرض}) \times 2$ پس طول + عرض = ۱۰. مستطیل‌های ناهمنهشت (طول $\leq$ عرض):
 $5 \times 5, 6 \times 4, 7 \times 3, 8 \times 2, 9 \times 1$; پاسخ: ۵ مستطیل (از جمله مربع 5×5).

ب) $x + y = 10$ و جواب‌های طبیعی (جفت مرتب (x, y)):
 $(1, 9), (2, 8), (3, 7), (4, 6), (5, 5), (6, 4), (7, 3), (8, 2), (9, 1)$
 و (y, x) دو جواب جداگانه‌اند ولی یک مستطیل را می‌سازند.

۷. الف) معادله $x + 2y = 50$ چند جواب صحیح نامنفی دارد؟
 ب) معادله $x + 2y + 4z = 100$ چند جواب صحیح نامنفی دارد؟

الف) y می‌تواند ۰، ۱، ...، ۲۵ باشد و برای هر y مقدار $x = 50 - 2y \geq 0$ یکتا است؛ پس ۲۶ جواب.
 ب) برای هر $z = 0, 1, \dots, 25$ باید $x + 2y = 100 - 4z$ باشد؛ مانند «الف» تعداد جواب‌ها $51 - 2z = (100 - 4z)/2 + 1$ است. مجموع:

$$\sum_{z=0}^{25} (51 - 2z) = 26 \times 51 - 2 \times \frac{25 \times 26}{2} = 1326 - 650 = 676$$

پاسخ: الف) ۲۶ ب) ۶۷۶ جواب.

۸. چند عدد حسابی یک رقمی مانند a و b در معادله $ab = 10 + a$ صدق می‌کنند؟

$ab - a = 10$ پس $a(b - 1) = 10$. a باید مقسوم‌علیه ۱۰ و تک‌رقمی باشد: $a = 1, 2, 5$.

☐ $a = 1 \leftarrow b - 1 = 10 \leftarrow b = 11$ (تک‌رقمی نیست) $\times$

☐ $a = 2 \leftarrow b - 1 = 5 \leftarrow b = 6$ $\checkmark$ ($2 \times 6 = 12 = 10 + 2$)

☐ $a = 5 \leftarrow b - 1 = 2 \leftarrow b = 3$ $\checkmark$ ($5 \times 3 = 15 = 10 + 5$)

(برای $a = 0$ داریم $0 = 10$ که ناممکن است.) پاسخ: دو جفت $(a, b) = (2, 6)$ و $(5, 3)$ که شامل ۴ عدد ۲، ۳، ۵، ۶ است.

۹. چند عدد صحیح می‌توان یافت که حاصل ضرب آن عدد در عدد قبلی‌اش برابر با حاصل ضرب آن عدد در عدد بعدی‌اش شود؟

ممتاز و مهناز این مسئله را به صورت زیر حل کرده‌اند. درباره راه حل این دو نفر بحث کنید.

راه حل ممتاز: $1 = -1 \Rightarrow (x+1) = (x-1) \Rightarrow (x)(x+1) = (x)(x-1) \Rightarrow x(x+1) = x(x-1)$ بنابراین این مسئله جواب ندارد.

راه حل مهناز: $x = 0 \Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow x^2 + x = x^2 - x \Rightarrow x(x+1) = x(x-1)$ بنابراین فقط عدد صفر جواب این مسئله است.

معادله $x(x-1) = x(x+1)$ (حاصل ضرب عدد در قبلی = حاصل ضرب عدد در بعدی) است.

راه حل ممتاز نادرست است؛ او دو طرف را بر x تقسیم (ساده) کرده و فراموش کرده که x ممکن است صفر باشد؛ تقسیم بر صفر مجاز نیست. با این کار جواب $x = 0$ را از دست داده و نتیجه گرفته مسئله جواب ندارد.

راه حل مهناز درست است: $x = 0 \Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow x^2 + x = x^2 - x$ و همه گام‌ها برگشت پذیرند. امتحان: $0 \times (-1) = 0 = 0 \times 1$.

درست‌ترین روش: $0 = x(x+1) - x(x-1) = 0 \Rightarrow x[(x+1) - (x-1)] = 0 \Rightarrow 2x = 0$.

پاسخ: فقط یک عدد صحیح (عدد ۰).

۱۰. چند عدد صحیح وجود دارد که حاصل ضرب آن در عدد بعدی‌اش، چهار واحد بیشتر از آن عدد باشد؟

$n(n+1) = n+4 \Rightarrow n^2 = 4 \Rightarrow n = 2$ یا $n = -2$.

امتحان: $2 \times 3 = 6 = 2 + 4$ و $(-2)(-1) = 2 = -2 + 4$. ✓

پاسخ: دو عدد (۲ و -۲).

۱۱. عددی از $\frac{1}{5}$ آن $\frac{2}{7}$ بیشتر است. آن عدد چیست؟

عدد را x بنامیم: $\frac{2}{7}x - \frac{1}{5}x = \frac{2}{7}$. $\frac{2}{7}x - \frac{1}{5}x = \frac{2}{7} \Rightarrow x = \frac{2}{7} \times \frac{15}{2} = \frac{30}{7}$ پس $\frac{2}{7}x - \frac{1}{5}x = \frac{10-3}{15} = \frac{7}{15}$.

امتحان: $\frac{20}{49} \times \frac{30}{49} = \frac{6}{49}$ و $\frac{1}{5} \times \frac{30}{49} = \frac{6}{49}$ و $\frac{2}{7} - \frac{6}{49} = \frac{14}{49} = \frac{2}{7}$. ✓

پاسخ: $\frac{30}{49}$.

۱۲. یکی از همسایه‌های طاهره خانم، سن او را پرسید. طاهره خانم گفت: «سن من دوسوم سال‌هایی است که مانده تا ۱۰۰ ساله شوم». سن طاهره خانم چقدر است؟

سن او x و سال‌های مانده تا ۱۰۰ سالگی $x - 100$ است:

$$x = \frac{2}{3}(100 - x) \Rightarrow 3x = 200 - 2x \Rightarrow 5x = 200 \Rightarrow x = 40$$

 امتحان: $100 - 40 = 60$ و $\frac{2}{3} \times 60 = 40$ ✓ پاسخ: ۴۰ سال.

۱۳. عددی به ما داده شده است. آن را دو برابر می‌کنیم و یک واحد از نتیجه کم می‌کنیم. اگر نتیجه $2^{100} + 1$ باشد، با چه عددی شروع کرده‌ایم؟

عدد را x بنامیم: $2x - 1 = 2^{100} + 1 \Rightarrow 2x = 2^{100} + 2 \Rightarrow x = 2^{99} + 1$
 امتحان: $2(2^{99} + 1) - 1 = 2^{100} + 2 - 1 = 2^{100} + 1$ ✓ پاسخ: $2^{99} + 1$.

۱۴. اگر قیمت بی‌تخفیف سه تلفن همراه از یک نوع برابر قیمت با تخفیف پنج تلفن همراه از همان نوع باشد، تخفیف چند درصد است؟

قیمت یک تلفن را p و تخفیف را d (به صورت عدد اعشاری) بنامیم:

$$3p = 5p(1 - d) \Rightarrow 1 - d = \frac{3}{5} \Rightarrow d = \frac{2}{5} = 0.4$$

 امتحان: با تخفیف ۴۰٪، قیمت هر تلفن $0.6p$ و قیمت پنج تا $3p$ می‌شود. پاسخ: ۴۰ درصد.

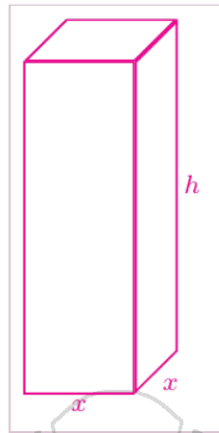
۱۵. وقتی ۳۰ درصد از یک بشکه خالی است، حجم آن ۳۰ لیتر بیشتر از زمانی است که ۳۰ درصد از آن بشکه پر است. وقتی بشکه کاملاً پر است، حجم بشکه چقدر است؟

حجم کامل بشکه V است. وقتی ۳۰٪ خالی است، ۷۰٪ آن پر است: $0.7V$. وقتی ۳۰٪ پر است: $0.3V$.

$$V = 0.7V + 30 \text{ و } 0.4V = 30 \Rightarrow 0.3V = 30 \Rightarrow V = 100$$

 امتحان: $0.7 \times 100 = 70$ و $70 + 30 = 100$ ✓ پاسخ: ۷۵ لیتر.

۱۶. شکل زیر یک مکعب مستطیل است که مساحت کل آن برابر ۱۸۲ می‌باشد. اگر $x + h = ۱۰$ ، آنگاه h را بیابید.



قاعده مکعب مستطیل مربعی به ضلع x و ارتفاع آن h است. مساحت کل = مساحت دو قاعده + مساحت چهار وجه جانبی:

$$۲x^2 + 4xh = ۱۸۲ \Rightarrow x^2 + 2xh = ۹۱ \quad \text{با } h = ۱۰ - x \Rightarrow -x^2 + 20x - ۹۱ = 0 \Rightarrow x^2 - 20x + ۹۱ = 0$$

$x^2 - 20x + ۹۱ = (x - ۷)(x - ۱۳) = 0$ پس $x = ۷$ یا $x = ۱۳$. اگر $x = ۱۳$ آن‌گاه $h = -۳$ که ممکن نیست. پس $x = ۷$ و $h = ۳$.

امتحان: $۲ \times ۴۹ + ۴ \times ۷ \times ۳ = ۹۸ + ۸۴ = ۱۸۲$. پاسخ: $h = ۳$.

۱۷. مکعب مستطیلی به ابعاد x ، x و $\frac{۱۰}{۳}$ را در نظر بگیرید. این مکعب را روی وجه مربعی آن قرار داده‌ایم و تا ارتفاع h داخل آن آب ریخته‌ایم. اگر مکعب را بغلتانیم و آن را روی وجه $x \times \frac{۱۰}{۳}$ قرار دهیم، ارتفاع آب ۳ می‌شود. اگر x عددی صحیح باشد، آنگاه h را بیابید.

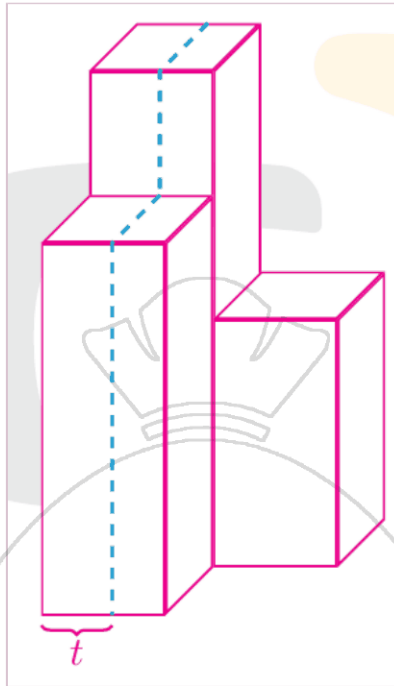
حجم آب در دو حالت یکسان است. حالت اول: قاعده $x \times x$ و ارتفاع h : $V = x^2 h$. حالت دوم: قاعده $x \times \frac{۱۰}{۳}$ و ارتفاع آب ۳ : $V = x \cdot \frac{۱۰}{۳} \cdot ۳ = ۱۰x$.

$$x^2 h = ۱۰x \Rightarrow h = \frac{۱۰}{x} \quad (x \neq 0 \text{ چون})$$

شرط‌ها: ارتفاع آب در حالت دوم (۳) نباید از ارتفاع ظرف در آن حالت یعنی x بیشتر باشد: $x \geq ۳$ (که با $h \leq \frac{۱۰}{۳}$ هم‌ارز است). پس x هر عدد صحیح ≥ ۳ باشد:

پاسخ: $h = \frac{۱۰}{x}$ (به‌ازای $x = ۳, ۴, ۵, ۶, ۷, \dots$ مقدارهای $(\frac{۱۰}{۳}, \frac{۵}{۲}, ۲, \frac{۵}{۳}, \frac{۱۰}{۷}, \dots)$ ؛ پرسش جز $x \geq ۳$ شرط دیگری برای x نمی‌دهد.

۱۸. سه مکعب مستطیل چوبی مانند شکل زیر به یکدیگر چسبیده‌اند. ارتفاع این مکعب مستطیل‌ها ۲، ۳ و ۴ و قاعده‌های سه مکعب مربع‌های هم‌نهشت به طول ضلع ۱ هستند. با یک اِزّه، این حجم چوبی را از محل خط چین به دو قسمت با حجم مساوی تقسیم می‌کنیم. t چه کسری از طول ضلع مربع است؟



از شکل: سه مکعب مستطیل با قاعده 1×1 و ارتفاع‌های ۴ (پشت-چپ)، ۳ (جلو-چپ) و ۲ (پشت-راست) هستند. حجم کل $9 = (4 + 3 + 2) \times 1$ و نصف آن $4,5$ است.

برش با صفحه‌ای قائم و موازی وجه جانبی، در فاصله t از لبه چپ، از دو مکعب مستطیل بلند سمت چپ (ارتفاع‌های ۳ و ۴) می‌گذرد. حجم قسمت چپ: $4t + 3t = 7t$.

$$7t = \frac{9}{2} \Rightarrow t = \frac{9}{14} \quad (\text{امتحان: قسمت راست } 4,5 = 2 + 2,5 = 2 + \frac{5}{2} = 2 + \frac{5}{2} \times \frac{1}{2} = 2 + \frac{5}{4} = \frac{8}{4} + \frac{5}{4} = \frac{13}{4} \quad \checkmark)$$

پاسخ: $t = \frac{9}{14}$ طول ضلع مربع.

۱۹. حاصل جمع پنج عدد طبیعی متوالی برابر با حاصل جمع سه عدد طبیعی متوالی بعدی است. مجموع این هشت عدد را به دست آورید.

پنج عدد: $n, n+1, \dots, n+4$ (مجموع $5n + 10$) و سه عدد بعدی $n+5, n+6, n+7$ (مجموع $3n + 18$).

$$5n + 10 = 3n + 18 \Rightarrow 2n = 8 \Rightarrow n = 4 \quad \checkmark \quad \text{اعداد } 4, 5, 6, 7, 8 \text{ و } 9, 10, 11 \quad \checkmark$$

۵۷

صفحه ۷۳

تمرین ۲۰

۲۰. شانزده عدد طبیعی متمایز که میانگین آنها ۱۶ باشد را در نظر بگیرید. در بین این اعداد بزرگ‌ترین عدد ممکن، چه عددی است؟

مجموع شانزده عدد $۲۵۶ = ۱۶ \times ۱۶$ است. برای بزرگ‌ترین شدن یکی از اعداد، باید ۱۵ عدد دیگر کوچک‌ترین مجموع ممکن را داشته باشند؛ چون متمایز و طبیعی‌اند، کمترین مجموع مربوط به ۱، ۲، ...، ۱۵ یعنی ۱۲۰ است.

بزرگ‌ترین عدد $۱۳۶ = ۲۵۶ - ۱۲۰$ است. پاسخ: ۱۳۶ (مثلاً ۱، ۲، ...، ۱۵، ۱۳۶ که میانگین آنها $۱۶ = ۲۵۶/۱۶$ است).

۵۸

صفحه ۷۳

تمرین ۲۱

۲۱. من و چهار نفر از دوستانم مقداری پول خرج کرده‌ایم. به‌طور متوسط هر کدام از ما ۸۰۰۰ تومان خرج کرده است. من ۱۰۰۰۰ تومان خرج کرده‌ام. هر کدام از دوستانم به‌طور متوسط چقدر خرج کرده‌اند؟

پنج نفر هستیم: مجموع هزینه‌ها $۴۰۰۰۰ = ۵ \times ۸۰۰۰$ تومان. من ۱۰۰۰۰ تومان خرج کرده‌ام؛ چهار دوست $۳۰۰۰۰ = ۴۰۰۰۰ - ۱۰۰۰۰$ تومان خرج کرده‌اند و میانگین آنها $۷۵۰۰ = ۳۰۰۰۰ / ۴$ تومان است. پاسخ: ۷۵۰۰ تومان.

۵۹

صفحه ۷۴

تمرین ۲۲

۲۲. تعدادی از مؤلفان کتاب‌های تکمیلی ویژه استعدادهای درخشان در جلسه‌ای حضور داشتند. میانگین سن این افراد برابر تعدادشان بود. شخصی که ۶۱ ساله بود، به این جلسه اضافه شد. الف) اگر بازهم میانگین سن افراد حاضر در جلسه برابر تعدادشان باشد، در ابتدا چند نفر در جلسه حضور داشته‌اند؟
ب) اگر میانگین سن افراد حاضر در جلسه تغییر نکرده باشد، در ابتدا چند نفر در جلسه حضور داشته‌اند؟

در ابتدا n نفر با میانگین n بودند؛ مجموع سن‌ها $n \times n = n^2$.

الف) پس از افزودن شخص ۶۱ ساله $n+1$ نفر هستند و میانگین باید $n+1$ باشد:
 $۲n = ۶۰ \Rightarrow n = ۳۰$ (امتحان: $n^2 + ۶۱ = (n+1)^2 = n^2 + ۲n + ۱$)

ب) میانگین بدون تغییر یعنی n : $n^2 + ۶۱ = n(n+1) = n^2 + n \Rightarrow n = ۶۱$ (امتحان: $۶۱^2 + ۶۱ = ۶۱ \times ۶۲$) و میانگین (۶۱)

۶۰

صفحه ۷۴

تمرین ۲۳

۲۳. الف) امیرحسین هر روز صبح با دوچرخه از خانه به مدرسه می‌رود. او صبح‌ها مسیر خانه تا مدرسه را با سرعت ۳۰ کیلومتر در ساعت و بعدازظهرها مسیر مدرسه تا خانه را با سرعت ۹۰ کیلومتر در ساعت رکاب می‌زند. چرا میانگین سرعت امیرحسین ۶۰ کیلومتر در ساعت نیست؟
ب) مسئله را در حالت کلی که سرعت‌های ۳۰ و ۹۰ به ترتیب با v و u جانشین شوند، حل کنید.

الف) میانگین سرعت یعنی کل مسافت تقسیم بر کل زمان، نه میانگین دو سرعت. زمان‌ها یکسان نیست: در مسیر کندتر (۳۰) زمان بیشتری صرف می‌شود. اگر مسافت یک‌طرفه d باشد: زمان رفت $\frac{d}{30}$ و زمان برگشت $\frac{d}{90}$.

کل زمان $\frac{d}{30} + \frac{d}{90} = \frac{4d}{90}$ و کل مسافت $2d$: $\frac{2d}{4d/90} = 45$ کیلومتر در ساعت (نه ۶۰).

ب) کل مسافت $2d$ و کل زمان $\frac{d}{u} + \frac{d}{v} = \frac{d(u+v)}{uv}$ است؛ پس میانگین سرعت $\frac{2d}{d(u+v)/(uv)} = \frac{2uv}{u+v}$.
(برای $u=90, v=30$: $\frac{2 \times 90 \times 30}{120} = 45$) پاسخ: $\frac{2uv}{u+v}$.

۶۱

صفحه ۷۵

تمرین ۲۴

۲۴. هومن پول‌هایش را جمع می‌کند تا رایانه‌ای ۵,۴۰۰,۰۰۰ تومانی بخرد. وقتی شروین از هومن پرسید: «چقدر پول جمع کرده‌ای؟» هومن گفت: «اگر یک‌پنجم بیشتر از پول الانم را داشتم، یک‌چهارم کمتر از پولی که برای خرید رایانه لازم دارم، نیاز داشتم.»
وقتی بهمن از هومن پرسید: «چقدر پول جمع کرده‌ای؟» هومن گفت: «اگر یک‌پنجم بیشتر از پول الانم داشتم، هنوز سه‌چهارم از پول خرید رایانه را نیاز داشتم.»
باتوجه به متن بالا آیا می‌توان گفت هومن راستگو نیست؟!

پول هومن را x و قیمت رایانه را ۵۴۰۰۰۰۰ می‌گیریم. «پولی که لازم دارم» یعنی کسری فعلی $5400000 - x$.
به شروین: با $1/2x$ پول، کسری $5400000 - 1/2x$ می‌شد که یک‌چهارم کمتر از کسری فعلی است:
 $5400000 - 1/2x = \frac{3}{4}(5400000 - x)$
به بهمن: با $1/2x$ هنوز سه‌چهارم قیمت رایانه کم بود:
 $5400000 - 1/2x = \frac{3}{4} \times 5400000 = 4050000 \Rightarrow 1/2x = 1350000 \Rightarrow x = 2700000$

دو پاسخ با هم تناقض دارد (۳,۰۰۰,۰۰۰ و ۱,۱۲۵,۰۰۰ تومان)؛ هر دو نمی‌توانند درست باشند. پس بله، می‌توان گفت دست‌کم یکی از دو جمله هومن نادرست است و او راستگو نیست. (امتحان: برای $x = ۳۰۰۰۰۰۰$ و شروین: $۲۴۰۰۰۰۰ \times \frac{3}{4} = ۱۸۰۰۰۰۰ = ۳۶۰۰۰۰۰ - ۵۴۰۰۰۰۰$ ؛ برای $x = ۱۱۲۵۰۰۰$ و بهمن: $۵۴۰۰۰۰۰ - ۱۳۵۰۰۰۰ = ۴۰۵۰۰۰۰ = \frac{3}{4} \times ۵۴۰۰۰۰۰$).

پاسخ: بله.

تمرین ۲۵

صفحه ۷۵

۶۲

۲۵. چه عددی است که اگر آن را در ۳ ضرب کنیم، سپس $\frac{3}{4}$ حاصل ضرب را به حاصل ضرب اضافه کنیم، بعد حاصل این جمع را بر ۷ تقسیم کنیم و سپس $\frac{1}{3}$ خارج قسمت را از خارج قسمت کم کنیم و حاصل تفاضل را به توان ۲ برسانیم و ۵۲ واحد از این مجذور کم کنیم، بعد از جذر گرفتن از حاصل آخرین تفاضل، ۸ واحد به این جذر اضافه کنیم و نتیجه را بر ۱۰ تقسیم کنیم، پاسخ مساوی ۲ شود؟

از آخر به اول (معکوس) حساب می‌کنیم: نتیجه نهایی ۲ است.

○ $۱۰ \times ۱۰ = ۲۰$ ، $۲ \times ۱۰ = ۲۰$ ، $۱۲ : ۸ = ۱۲$ (جذر آخرین تفاضل)،

○ به توان ۲: $۱۴۴ : ۵۲ = ۱۹۶$ (مربع تفاضل)،

○ جذر: ۱۴ (یا -۱۴).

از طرف دیگر: عدد $n \leftarrow ۳n \leftarrow ۳n + \frac{3}{4} \times ۳n = \frac{۲۱n}{4} \leftarrow \frac{۲۱n}{4} \div ۷ = \frac{۳n}{4} \leftarrow \frac{۳n}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{۳n}{4} - \frac{1}{3} \times \frac{۳n}{4} = \frac{۳n}{4}$

$\Rightarrow n = \pm ۲۸$ پاسخ: عدد ۲۸ (و البته -۲۸ هم خاصیت را دارد).

امتحان با $۲۸ : ۲۸ = ۸۴$ ، $۳ \times ۲۸ = ۸۴$ ، $۱۴۷ - ۶۳ = ۸۴$ ، $۱۴۷ / ۷ = ۲۱$ ، $۱۴۷ - ۷ = ۱۴$ ، $۲۱ - ۷ = ۱۴$ ، $۱۴^2 = ۱۹۶$ ، $۱۹۶ - ۵۲ = ۱۴۴$ ، $\sqrt{۱۴۴} = ۱۲$ ، $۱۲ + ۸ = ۲۰$ ، $۲۰ / ۱۰ = ۲$ ✓.

تمرین ۲۶

صفحه ۷۵

۶۳

۲۶. رامبد گفته که او و شش نفر از دوستانش باهم ۷۰۷ لبو فروخته‌اند. می‌دانیم تعداد لبوهای فروخته شده هیچ دوتای آنها یکی نیست و تعداد لبوهای کسی که بیشترین لبو را فروخته است، شش لبو بیشتر از کسی است که کمترین لبو را فروخته است. کسی که کمترین لبو را فروخته، چه تعداد لبو فروخته است؟

هفت نفر، تعدادهای متمایز. اگر کمترین m باشد، بیشترین $m + ۶$ است. هفت عدد متمایز صحیح در بازه m

تا $m + ۶$ (که فقط ۷ عدد صحیح دارد) باید دقیقاً $m + ۶$ ، $m + ۱$ ، $...$ ، m باشند.

مجموع: $۷۰۷ = ۷m + ۲۱ = ۷m + (۰ + ۱ + ... + ۶)$ پس $۷m = ۶۸۶$ و $m = ۹۸$.

امتحان: $۷۰۷ = ۷ \times ۱۰۱ = ۷۰۷$ ✓. پاسخ: ۹۸ لبو.

۲۷. رضا می‌خواست دو عدد دو رقمی را در هم ضرب کند. متأسفانه عدد اولی را در مقلوب عدد دومی ضرب کرد. جواب رضا ۳۸۱۶ واحد بیشتر از جواب درست بود. جواب درست را بیابید.

عدد اول A و عدد دوم $10c + d$ (با $c \geq 1$) و مقلوب آن $10d + c$ است. تفاوت جواب‌ها:

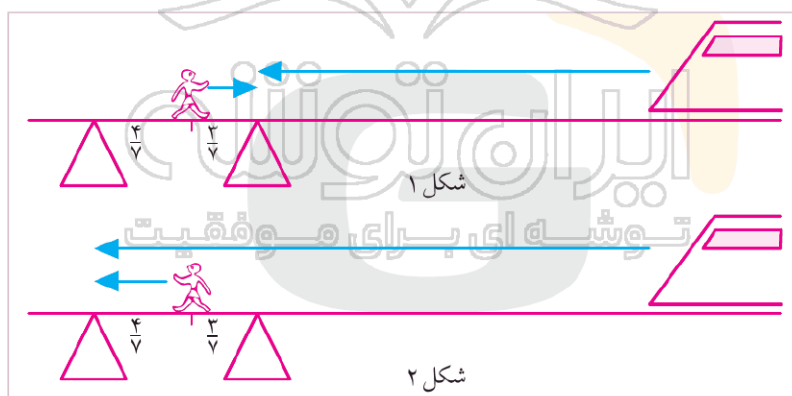
$$A(10d + c) - A(10c + d) = A(9d - 9c) = 9A(d - c) = 3816$$

$$\Rightarrow A(d - c) = 424 = 2^3 \times 53$$

عدد دو رقمی A شمارنده ۴۲۴ است: شمارنده‌های ۴۲۴ برابر ۱، ۲، ۴، ۸، ۵۳، ۱۰۶، ۲۱۲، ۴۲۴ هستند؛ دو رقمی فقط ۵۳. پس $A = 53$ و $d - c = 8$. چون $c \geq 1$ و $d \leq 9$ ، $c = 1$ و $d = 9$. عدد دوم ۱۹ و مقلوبش ۹۱ است.

امتحان: $4823 = 53 \times 91$ و $53 \times 19 = 1007$ و $4823 - 1007 = 3816$ ✓. پاسخ: $53 \times 19 = 1007$.

۲۸. ریزعلی روی پلی که ریل راه‌آهن از آن عبور می‌کرد، در حال حرکت بود. او بعد از اینکه $\frac{4}{V}$ مسافت روی پل را پیمود، قطاری دید که از روبه‌رو به سمت او می‌آید. ریزعلی تشخیص داد که اگر به سمت قطار بدود در لبه پل به قطار می‌رسد (شکل ۱) و می‌تواند از ریل خارج شود؛ همچنین اگر برگردد و به سمت دیگر پل بدود باز هم در لبه پل قطار به او می‌رسد و می‌تواند به موقع از ریل خارج شود (شکل ۲). اگر سرعت دویدن ریزعلی ۲۰ کیلومتر در ساعت باشد، سرعت قطار چقدر بوده است؟



طول پل L و فاصله قطار تا ابتدای پل (لبه نزدیک به قطار) هنگام دیدن D است. ریزعلی $\frac{4}{V}L$ را رفته و $\frac{3}{V}L$ مانده است. سرعت قطار V و سرعت ریزعلی ۲۰ است.

شکل ۱ (دویدن به سمت قطار): ریزعلی $\frac{3}{V}L$ می‌دود و در لبه پل با قطار برخورد می‌کند؛ زمان $t_1 = \frac{3L/V}{20}$ و قطار در این مدت D را می‌پیماید: $D = V t_1$.

شکل ۲ (دویدن به سمت برگشت): ریزعلی $\frac{4}{V}L$ می‌دود؛ زمان $t_2 = \frac{4L/V}{V_0}$ و در این مدت قطار $D + L$ را می‌پیماید (تا لبهٔ دوم): $D + L = V t_2$.
 تفريق: $L = V(t_2 - t_1) = V \cdot \frac{L/V}{V_0} \Rightarrow V = 20 \times V = 140$
 پاسخ: سرعت قطار ۱۴۰ کیلومتر در ساعت.

این فایل توسط سایت ایران توشه تهیه شده است.

irantooshe.ir

